1. El modelo neoclásico de crecimiento de Solow-Swan

1.1 Introducción

¿Por qué crecen las economías? La opinión popular acostumbra a dar tres tipos de respuestas a esta pregunta: la primera nos dirá que la economía crece porque los trabajadores tienen cada vez más instrumentos, más máquinas y, en definitiva, más *capital* con los que trabajar. La clave del crecimiento, pues, será la *inversión* por parte de las empresas. El segundo tipo de respuesta asegurará que la clave es la *educación* de la población: hoy somos capaces de producir mucho más que hace cien años porque los trabajadores de hoy en día están mucho más cualificados. El tercer tipo de respuesta relacionará el crecimiento económico con el *progreso tecnológico.* Según esta visión, hoy somos mucho más productivos porque las máquinas que utilizamos son mucho mejores y porque nuestro nivel de conocimientos es muy superior al que teníamos hace un siglo.

En este sentido, será frecuente leer en la prensa que los gobiernos que buscan el progreso de sus países deben promover el *ahorro* y la *inversión* nacional, la *educación* de la población y las *actividades de Investigación y Desarrollo (I+D).* En este libro estudiaremos el fenómeno del crecimiento económico y analizaremos el papel que desempeñan estos tres factores fundamentales en la generación del crecimiento. Veremos que, a pesar de ir bien encaminada, la visión popular no tiene toda la razón.

Estudiaremos estos fenómenos de la manera que los economistas modernos los estudian: mediante la creación de simplificaciones de la realidad según las cuales se intenta aislar el fenómeno que se quiere estudiar abstrayendo de todos los demás aspectos de la economía. Estas abstracciones se llaman *modelos.*

Los modelos de crecimiento que se encuentran en la literatura económica tienen una estructura de *equilibrio general*. Por una parte están las familias, que poseen activos financieros y trabajo que generan rentas o ingresos. Las familias utilizan parte de estos ingresos para consumir y ahorran el resto. Por otra parte están las empresas, que alquilan el trabajo y el capital de las familias y los combinan con una tecnología para producir unos productos que luego venden a las familias. En tercer lugar están los mercados, que reúnen a las familias y a las empresas. En estos mercados, los empresarios compran o alquilan el trabajo a un precio que llamamos *salario* y alquilan el capital que poseen las familias a cambio de una *rentas* o *dividendos*. También en estos mercados las familias compran los bienes producidos por las empresas. Los precios que pagan las empresas por los factores de producción y los precios que pagan las familias por los bienes vendidos por las empresas los "deciden" los mercados de tal manera que todas las ofertas y demandas de la economía se igualen.

Esta es la estructura general de los modelos de crecimiento modernos. Las diferencias entre modelos residen en las características de la función de producción, en la capacidad de generar progreso tecnológico, en si existe un gobierno que pone impuestos y se gasta la recaudación, o en si se considera un mercado internacional de capitales en el que prestar y pedir prestado.

En los dos capítulos iniciales de este libro, sin embargo, nos apartaremos de este esquema común y estudiaremos un modelo mucho más simple en el que no habrá ni empresas, ni mercados. Las familias serán las propietarias de los factores de producción y de la tecnología, de manera que no tendrán que intercambiar nada en los mercados. De alguna manera, más que una descripción de las economías modernas, el marco se parecerá a la economía de Robinson Crusoe, donde no había empresas, ni empleados, ni mercados: Robinson combinaba su propio trabajo con los árboles (capital) para producir cocos sin necesidad de mercados. A pesar de su simplicidad, veremos que estos modelos sencillos nos darán lecciones extraordinariamente parecidas a las de los modelos más complicados de la segunda parte del libro.

1.2 Los fundamentos del modelo neoclásico de Solow-Swan

Comencemos por la identidad de la renta nacional. Denotaremos con Y_t el Producto Interior Bruto (PIB) de un país en el año t, que es la cantidad de producto o galletas producidas durante ese año. El PIB es utilizado de cuatro formas distintas. Una parte la compran las familias para su propio *consumo privado*, que denotamos con la letra C_t. Otra parte la compran las empresas y esto es lo que llamamos *inversión*, I_t. La tercera parte la compra el gobierno (el *gasto público*) y lo denotamos con la letra G_t. Finalmente, el resto de las galletas se exporta al extranjero en lo que se llama *exportaciones netas*, NX_t. Esta identidad nacional puede escribirse como

$$Y_t = C_t + I_t + G_t + NX_t \qquad [1.1]$$

El término de la izquierda de esta identidad se puede interpretar como la *oferta* de la economía, mientras que los términos de la derecha son los cuatro componentes de la *demanda agregada*. El comportamiento de los diferentes componentes de [1.1] es muy complejo y no se puede estudiar todo a la vez. Es por ello que los economistas intentan aislar lo que creen que es más importante. En este modelo inicial, *intentaremos estudiar el papel de la inversión en capital físico como motor fundamental del crecimiento a largo plazo* y nos preguntamos si el gobierno podría aumentar la tasa de crecimiento si consiguiera aumentar la tasa de inversión nacional. Esta pregunta tiene mucho sentido si miramos datos internacionales: mientras los países del este de Asia, que han experimentado tasas de crecimiento enormes, tienen tasas de inversión superiores al 20% (por ejemplo, la tasa de inversión media entre 1960 y 1990 fue de 22,9% en Hong Kong, 24,6% en Taiwan, 32,6% en Singapur o 36,6% en Japón) , la mayor parte de los países africanos con crecimiento casi nulo invierten menos del 10% del PIB (por ejemplo, la tasa de inversión durante el mismo periodo fue de 5,7% en Etiopía, 4,7% en Uganda, 3,7% en Chad, o 2,0% en Mozambique). Por lo tanto, no parece descabellado relacionar la inversión en capital físico con el crecimiento económico.

Para ver el papel de la inversión es necesario *aislarla* de los demás aspectos de la economía, aspectos que quizá también sean importantes. Lo hacemos a continuación.

I. Simplificaciones iniciales: una economía cerrada y sin gobierno

Para empezar, simplificaremos el análisis imaginando que nuestra economía es cerrada en el sentido de que no hay exportaciones netas, $NX_t = 0$, y que no hay movimientos de capitales, por lo que la economía en su conjunto no puede pedir prestado y, en consecuencia, todo lo ahorrado se debe invertir dentro del propio país. Segundo, imaginaremos que el gobierno no gasta nada, $G_t = 0$. Estos dos supuestos son poco realistas por cuanto sabemos que en los países más ricos el gobierno es el responsable de más del 50% del gasto nacional. También sabemos que las economías modernas exportan gran parte de su producción e importan gran parte de su consumo. Algunos países tienen déficit en su cuenta corriente ($NX_t < 0$), mientras que otros tienen superávit ($NX_t > 0$). Lo que raramente sucede es que la balanza por cuenta corriente sea exactamente cero. Sin embargo, este supuesto nos va a ayudar a concentrarnos en el papel que desempeña la inversión en el proceso de crecimiento económico.

Tras estos dos supuestos iniciales, observamos que la identidad nacional se reduce a

$$Y_t = C_t + I_t \qquad [1.2]$$

Por lo tanto, cuando la economía está cerrada y no hay gasto público, el producto nacional se distribuye entre consumidores y inversores. Obsérvese que si restamos el consumo de los dos lados de [1.2] obtenemos que el ahorro (la producción o renta que no se consume) es igual a la inversión: $Y_t - C_t \equiv S_t = I_t$, donde S_t es el ahorro. Por lo tanto, en una economía cerrada sin gasto público, *el ahorro de las familias es igual a la inversión o la demanda de las empresas.*

II. La función de producción neoclásica

II.a. Los factores de producción

La oferta o producción de una economía, Y_t, se obtiene con la combinación de tres inputs o factores fundamentales. El primer factor de producción es el *factor trabajo*: para producir galletas es necesario que haya cocineros que las preparen. En la vida real hay muchos tipos de trabajo y de trabajadores. En este modelo sencillo, supondremos que todos los trabajadores son idénticos y la suma de todos ellos se indicará con la letra L_t. Es decir, L_t será la cantidad de trabajadores de nuestra economía en el momento t. El segundo factor de producción fundamental es el *capital*, K_t. El concepto de capital estará relacionado con las máquinas u otros utensilios físicos que utilizan las empresas en el proceso de producción (este concepto incluirá edificios, estructuras, instrumentos, ordenadores, material electrónico y un largo etcétera). Una característica de las máquinas es que son *bienes materiales que las empresas compran a otras empresas*. Por ejemplo, en la producción de galletas, se necesitan hornos. Los hornos, por su parte, provienen de la producción nacional en el sentido de que en algún momento del pasado alguna empresa los produjo, por lo que fueron parte de la producción, Y_t.

El tercer factor de producción no es tan tangible como los dos primeros. Se trata de la *tecnología*: ningún cocinero puede producir galletas sin tener una *receta* o *fórmula* que le indique como combinar capital y trabajo en las proporciones precisas. Esta fórmula es lo que llamamos *tecnología* o *conocimiento*. El nivel de tecnología se indicará con la letra A_t. Este factor puede ser menor o mayor dependiendo de cada país y momento del tiempo (las recetas que existían en el siglo XIX para producir relojes eran muy inferiores a las que existen hoy día, por lo que la A_t de entonces era inferior a la de ahora. De la misma forma, la tecnología disponible actualmente en el Japón es muy superior a la disponible en Zambia).

Es importante resaltar una diferencia fundamental que distingue los bienes *capital* y *trabajo* y lo que llamamos *conocimiento* o *tecnología* y es que los primeros son bienes rivales, mientras que la tecnología NO es rival.[1] El concepto de *rivalidad* es muy importante. Se dice que un bien es *rival* si no puede ser utilizado por más de un usuario a la vez. Si un bien puede ser utilizado por mucha gente al mismo tiempo

[1] Algunos economistas utilizan el concepto de bien *privado* para catalogar el trabajo y el capital, mientras que llaman bien *público* a la tecnología. Nosotros utilizaremos los términos bien *rival* y *no rival* porque los bienes públicos no solamente no son *rivales* sino que, además, son no *excluibles*. En el capítulo 9 estudiaremos estos conceptos y los relacionaremos con la tecnología.

se dice que es *no rival.* Por ejemplo, si una fábrica de galletas de Camprodón utiliza un determinado horno, el mismo horno no puede ser utilizado simultáneamente por una fábrica de Rentería. Por lo tanto, el horno (y el capital en general) es un bien *rival.* De la misma forma, un cocinero no puede trabajar al mismo tiempo en las fábricas de Camprodón y de Rentería, por lo que el trabajo también es un bien rival. Observe el lector que no se puede decir lo mismo de la receta que se utiliza para producir galletas: *la misma fórmula puede ser utilizada simultáneamente por las fábricas de Camprodón y Rentería.* La tecnología, pues, es un bien *no rival.* En el capítulo 9 hablaremos con más detalle de lo que es la tecnología y del concepto de no rivalidad. De momento, baste con señalar que, en general, el conocimiento, las ideas o la tecnología son bienes *no rivales* en el sentido de que la misma tecnología o fórmula se puede utilizar simultáneamente en más de una fábrica.

El capital, K, el trabajo, L, y la tecnología, A, se pueden mezclar para producir bienes finales, Y. Representaremos estas combinaciones a través de una *función de producción* como la siguiente:

$$Y_t = F(K_t, L_t, A_t). \tag{1.3}$$

Vemos que la producción de esta economía puede aumentar o *crecer* si aumenta K, si aumenta L o si aumenta A. Es decir, la economía agregada puede crecer si crece el stock de capital, la cantidad de trabajadores o si mejora la tecnología.

En este primer capítulo, seguiremos a Solow (1956) y Swan (1956) y nos concentraremos en las funciones de producción llamadas *neoclásicas.*

II.b. Propiedades de la función de producción neoclásica

Por funciones de producción neoclásicas entendemos aquellas funciones matemáticas que representan combinaciones de los factores capital, trabajo y tecnología, y que satisfacen las siguientes tres propiedades:

(i) *La función de producción presenta rendimientos constantes a escala.* Algebraicamente, esto quiere decir que si doblamos la cantidad del factor trabajo y del factor capital, la cantidad de producto se dobla. Si multiplicamos K y L por una constante arbitraria, λ, entonces la producción también se multiplica por la misma constante: $F(\lambda K, \lambda L, A) = \lambda F(K, L, A)$. Matemáticamente, esta propiedad se conoce con el nombre de *homogeneidad de grado uno.*

El estudiante habrá notado que en esta definición se ha multiplicado solamente el capital y el trabajo por λ y no la tecnología.[2] La razón por la que este supuesto es razonable es el *principio de réplica.* Imaginemos que tenemos una fábrica en

[2] Es decir, NO hemos dicho $F(\lambda K, \lambda L, \lambda A) = \lambda F(K, L, A)$, donde la variable A también está multiplicada por λ.

Camprodón que combina K máquinas con L trabajadores y una fórmula, A, para producir Y galletas. Debería ser cierto que si construimos otra fábrica *idéntica* en Rentería con el mismo número de máquinas, K, el mismo número de trabajadores, L, y *la misma fórmula A*, deberíamos producir la misma cantidad de galletas. Es decir, si replicamos la fábrica en otro sitio (si "doblamos" K y L), deberíamos ser capaces de replicar la producción (deberíamos doblar Y). La razón por la que *no hace falta doblar A es que la misma fórmula se puede utilizar en Camprodón y en Rentería, dado que la fórmula es un bien no rival.* Por lo tanto, el supuesto de rendimientos constantes a escala, donde por escala entendemos el capital y el trabajo (y no la tecnología), parece ser razonable.

(ii) El segundo supuesto que caracteriza la función de producción neoclásica es que *la productividad marginal de todos los factores de producción es positiva, pero decreciente.* Otra manera de decir lo mismo es que *la tecnología presenta rendimientos decrecientes del capital y del trabajo cuando éstos se consideran por separado.*[3] A medida que añadimos trabajadores adicionales, sin cambiar el stock de capital, la producción aumenta, pero lo hace tanto menos cuantos más trabajadores tengamos ya trabajando: el aumento en el número de cocineros hará que se molesten entre ellos de manera que, a pesar de que cada cocinero adicional aumenta la producción de galletas, el aumento es menor cuantos más cocineros haya ya trabajando.

Lo mismo pasa con el capital: a medida que aumentamos el número de máquinas, la producción aumenta, pero lo hace tanto menos cuantas más máquinas tengamos ya en la fábrica.

Algebraicamente, esto significa que el producto marginal del capital y del trabajo son positivos (el producto marginal de un factor es la derivada parcial de la producción con respecto al factor en cuestión) $[\partial F/\partial K > 0,\ \partial F/\partial L > 0]$, y decrecientes (las segundas derivadas son negativas): $[\partial^2 F/\partial K^2 < 0,\ \partial^2 F/\partial L^2 < 0]$.[4]

(iii) El tercer supuesto que debe satisfacer una función de producción neoclásica, $F(\cdot)$, se refiere a un conjunto de requerimientos llamados *condiciones de Inada.* Éstas exigen que la productividad marginal del capital se aproxime a cero cuando el

[3] Hay que resaltar que el concepto de rendimiento del capital es distinto al de rendimiento a escala. Cuando hablamos de rendimientos a escala nos preguntamos qué ocurre con la producción cuando aumentamos *simultáneamente* todos los inputs rivales. Cuando hablamos de rendimientos del capital nos preguntamos qué ocurre con la producción cuando aumentamos el capital manteniendo constante el factor trabajo (y, lógicamente, cuando hablamos de rendimientos del trabajo nos preguntamos qué ocurre con la producción cuando aumentamos el trabajo manteniendo constante el capital).

[4] En realidad, lo que necesitamos es que la función de producción sea cóncava, por lo que se requiere que la matriz de las segundas derivadas sea negativa definida, que es un supuesto un poco más restrictivo que el de que las segundas derivadas parciales con respecto de K y L sean negativas, y requiere que la derivada cruzada $\partial^2 F/\partial K \partial L$ no sea demasiado grande.

tiende a infinito y que tienda a infinito cuando el capital se aproxima a cero, $\lim_{K\to\infty} \partial F/\partial K = 0$, $\lim_{K\to 0} \partial F/\partial K = \infty$. Condiciones análogas se aplican al trabajo, $\lim_{L\to\infty} \partial F/\partial L = 0$ y $\lim_{L\to 0} \partial F/\partial L = \infty$.

II.c. La función de producción Cobb-Douglas

Una función de producción bastante sencilla que satisface las propiedades neoclásicas es la función Cobb-Douglas, donde $0 < \alpha < 1$.

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \qquad [1.4]$$

Paul Douglas fue un senador por Illinois entre 1949 y 1966. Cuando todavía era profesor de economía, Douglas descubrió un hecho sorprendente: la división de la renta nacional entre trabajadores y capitalistas permanecía más o menos constante en el tiempo. En particular, descubrió que los trabajadores en Estados Unidos se quedan con, más o menos, el 70 por ciento de la renta total, mientras que los capitalistas se quedan con el 30 por ciento. Esto le llevó a indagar las condiciones bajo las cuales las rentas de los factores mantenían proporciones constantes.

Como no sabía solucionar el problema, Douglas le preguntó a un matemático amigo suyo llamado Charles Cobb si había una función de producción tal que, si los factores de producción cobraban sus productos marginales, la proporción de la renta agregada que se quedaba cada uno de ellos fuera constante. La función de producción, pues, debería tener las dos propiedades siguientes:

(A) Renta del capital = (Producto marginal del capital) $\cdot K = \alpha Y$

y

(B) Renta del trabajo = (Producto marginal del trabajo) $\cdot L = (1-\alpha)Y$,

donde α es una constante que mide la fracción de la renta que se queda el capital (a menudo esta fracción se denomina participación del capital). Cobb demostró que tal función de producción existía y tomaba la forma $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$. Esta función de producción pasó a llamarse Cobb-Douglas. El lector puede comprobar que el producto marginal del capital es $\alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}$ y que si multiplicamos este producto marginal por K se obtiene αY. La fracción del PIB que se quedan los propietarios del capital es esta cantidad dividida por Y, es decir, la participación del capital en el PIB es constante e igual a α. También puede comprobarse que el producto marginal del trabajo es $(1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}$ y que si multiplicamos este producto por L obtenemos $(1-\alpha)Y$. La participación del trabajo es $1-\alpha$, que también es constante.

Comprobamos que la función de producción Cobb-Douglas es neoclásica: presenta rendimientos a escala constantes:

$$A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{1-\alpha} = \lambda AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = \lambda Y$$

También vemos que los productos marginales del capital y del trabajo son positivos:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha A K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} > 0$$
$$\frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha) A K^{\alpha} L^{-\alpha} > 0\,,$$

y que las segundas derivadas son negativas con lo que los productos marginales son decrecientes:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = \alpha(\alpha-1) A K^{\alpha-2} L^{1-\alpha} < 0$$
$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = (1-\alpha)(-\alpha) A K^{\alpha} L^{-\alpha-1} < 0.$$

Finalmente, los límites requeridos por las condiciones de Inada se cumplen:

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha A K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = 0 \quad , \quad \lim_{K\to 0} \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha A K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = \infty$$
$$\lim_{L\to\infty} \frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha) A K^{\alpha} L^{-\alpha} = 0 \quad , \quad \lim_{L\to 0} \frac{\partial Y}{\partial L} = (1-\alpha) A K^{\alpha} L^{-\alpha} = \infty.$$

Vemos, pues, que las función de producción Cobb-Douglas satisface todas las condiciones propias de las funciones de producción neoclásicas.

III. Supuestos adicionales

Utilizando la función de producción neoclásica, podemos reescribir [1.2] como

$$F(K_t, L_t, A_t) = C_t + I_t. \qquad [1.5]$$

Es decir, el producto final de la economía se distribuye entre consumo e inversión.

III.a. Tasa de ahorro constante

La razón por la que las familias consumen es que *les gusta* hacerlo. En la literatura macroeconómica moderna se supone que los consumidores eligen el consumo con el objetivo de maximizar una función de utilidad, sujetos a una restricción presupuestaria. Y eso es lo que haremos del capítulo 3 en adelante. De momento, sin embargo, será mucho más sencillo seguir el ejemplo de Solow y Swan y suponer que las familias *simplemente consumen una fracción constante de su renta o producto*. Es decir, si nuestras familias productoras producen Y galletas, supondremos que ahorran una fracción s y consumen el resto $(1-s)$. Por lo tanto, el consumo agregado, C, se puede escribir como:

$$C_t = (1 - s)Y_t, \qquad [1.6]$$

donde el término s es la *tasa de ahorro* (la *fracción* de la renta que los consumidores ahorran), una constante. Al ser una *fracción*, se debe cumplir que s es un número entre cero y uno, $0 < s < 1$. Este supuesto podría parecer descabellado. Sin embargo, si miramos las tasas de ahorro a lo largo de los últimos 100 años, vemos que en los países para los que hay datos, esta tasa de ahorro ha permanecido bastante estable.[5] Además, en el capítulo 3 se demostrará que una tasa de ahorro constante es óptima bajo ciertas circunstancias. También veremos que tanto el comportamiento de la economía como las principales lecciones que se extraen de estos modelos no dependen de si la tasa de ahorro es constante y exógena o es escogida óptimamente por los consumidores. Por estos motivos, el supuesto de que los consumidores ahorran una fracción constante del producto es una buena manera de empezar.

Si substituimos [1.6] en [1.5], obtenemos

$$sY_t = I_t.$$

En palabras: al igual que el consumo agregado, la inversión agregada es una fracción de la renta nacional. Como en una economía cerrada sin gasto público, el ahorro y la inversión coinciden, *la tasa de ahorro es también la tasa de inversión*.

III.b. Tasa de depreciación constante

A diferencia del consumo, la razón que lleva a las empresas a invertir (es decir, a comprar parte del producto nacional) no es que a las empresas les *guste* utilizar los bienes que compran, sino que la inversión sirve, bien para aumentar el stock de maquinaria disponible para una futura producción (esto se llama *inversión neta*), bien para reemplazar las máquinas que se deterioran en el proceso productivo (fenómeno que conocemos con el nombre de *depreciación*).

Utilizando términos de la contabilidad nacional, la *inversión bruta* (la cantidad de output adquirido por las empresas, I_t) es igual a la *inversión neta* (el aumento neto en el stock de maquinaria o capital) más la *depreciación*. Si denotamos el aumento neto de capital como $\dot{K} \equiv \frac{dK}{dt}$,[6] tenemos:

[5] A corto plazo, la tasa de ahorro fluctúa con el ciclo económico. Lo que estamos diciendo es que, a pesar de los movimientos a corto plazo, parece que la tasa de ahorro no tiene tendencia ascendente ni descendente a largo plazo.

[6] A lo largo de este libro, utilizaremos puntos sobre las variables para denotar *incrementos de la variable a medida que avanza el tiempo*. Es decir, un punto encima de una variable denotará la derivada de la variable con respecto al tiempo. Una manera alternativa de escribirlo sería utilizar el incremento de K, ΔK, en lugar del punto sobre la K. El lector que así lo prefiera, puede substituir TODOS los puntos del libro por el símbolo Δ sin que cambie nada fundamental.

$$I_t = \dot{K}_t + D_t. \qquad [1.7]$$

donde D_t es la depreciación. Para simplificar nuestro análisis, supondremos que en cada momento del tiempo, una fracción constante de las máquinas, δ, se deteriora por lo que la depreciación total es igual a la tasa de depreciación δ multiplicada por la cantidad de máquinas existente: δK_t.[7] Esto nos permite escribir [1.7] como $I_t = \dot{K}_t + \delta K_t$. El supuesto de depreciación constante también nos indica que las máquinas son siempre productivas mientras no se deterioran. En particular, no existen diferentes tipos de máquinas y las más viejas no son menos productivas que las más nuevas. En este sentido, las máquinas de nuestro modelo son parecidas a las bombillas. Mientras funcionan dan siempre la misma cantidad de luz pero con una determinada probabilidad dejan de funcionar y deben ser reemplazadas. Ahora bien, mientras funcionan, todas las bombillas (y todas las máquinas) son iguales.

Si substituimos I_t en [1.5] y utilizamos el supuesto de una tasa de ahorro constante [1.6], obtenemos

$$F(K_t, L_t, A_t) = C_t + I_t = (1 - s)F(K_t, L_t, A_t) + \dot{K}_t + \delta K_t.$$

Si ahora ponemos el término $\dot{K}$ en el lado izquierdo y colocamos todos los demás en el lado derecho, esta igualdad se puede reescribir como

$$\dot{K}_t = sF(K_t, L_t, A_t) - \delta K_t. \qquad [1.8]$$

Si estudiamos detenidamente la ecuación [1.8], veremos que nos dice algo interesante: si conociéramos los valores de K, L y A en el momento t, dado que s y δ son constantes conocidas, la ecuación [1.8] nos diría cual es el aumento del stock de capital durante el siguiente instante. El aumento en la cantidad de capital, a su vez, nos generaría un aumento o *crecimiento* de la producción. Esta ecuación, por lo tanto, es potencialmente útil y va a ser el fundamento sobre el que construiremos el modelo de crecimiento. Para ello debemos simplificar todavía un poquito más.

III.c. Población igual a trabajo y tasa constante de crecimiento de población

El objetivo de este capítulo es investigar los determinantes de la tasa de crecimiento de la economía. La tasa de crecimiento que nos interesa es la tasa de crecimiento

[7] Obsérvese que este supuesto conlleva el hecho de que la tasa de depreciación es independiente de las condiciones de la economía. Quizá sería más realista considerar que las empresas pueden determinar la intensidad con la que emplean su capital y que, por este motivo, cuando el capital se usa de forma más intensiva se deprecia más rápidamente. La literatura del crecimiento económico ha venido prescindiendo de esta posibilidad, a pesar de que, como veremos más adelante, la tasa de depreciación puede ser un determinante importante de la tasa de crecimiento.

del PIB, del consumo o del capital *por persona* y no la tasa de crecimiento del PIB, del consumo o del capital *agregados*. La razón es que nadie dice que un país sea rico porque produce mucho: más bien se considera que un país es rico si sus habitantes, en promedio, producen mucho. Por ejemplo, uno tiende a creer que Suiza es un país mucho más rico que la India aunque, en realidad, la producción agregada de la India es mucho mayor que la de Suiza. La razón por la que decimos que Suiza es más rica es que la producción *por habitante* o *per cápita* es muy superior: una vez dividimos todo lo producido en la India por los cerca de ochocientos millones de habitantes que tiene, vemos que toca a muy poco por habitante. En este sentido, en este libro también estamos interesados en investigar cómo evolucionan y crecen las variables de la economía en términos *per cápita*.

Para simplificar la notación, supondremos que la población de la economía es equivalente a la cantidad de trabajadores, L_t. Este supuesto es muy poco realista dado que, como sabemos, hay muchos habitantes en todas las economías que no trabajan en la producción de lo que llamamos PIB: niños, ancianos, parados y, en muchas sociedades, mujeres. Algunos de estos sectores producen bienes que no están incluidos en la contabilidad nacional (como es el caso de las mujeres, que cuidan de la salud de sus hijos o hacen labores en su hogar; ninguna de estas actividades aparece en el PIB). A pesar de que sabemos que existen estos colectivos que no trabajan en la producción de Y, seguiremos con el supuesto simplificador según el cual la variable L no solamente representa el factor trabajo sino también a la población total. Esto nos permitirá concentrar nuestro estudio en el papel que desempeña la inversión en capital físico.

Si utilizamos la equivalencia entre trabajo y población y dividimos los dos lados de [1.8] por L_t encontramos que

$$\frac{\dot{K}_t}{L_t} = s\frac{F(K_t, L_t, A_t)}{L_t} - \delta\frac{K_t}{L_t}. \qquad [1.9]$$

A partir de ahora, utilizaremos *letras minúsculas* para denotar el equivalente de la letra mayúscula expresado en términos per cápita. En otras palabras, si K_t es el stock de capital agregado, k_t será el stock de capital *per cápita*, $k_t \equiv K_t/L_t$. De forma similar definimos el consumo per cápita $c_t \equiv C_t/L_t$, y la producción per cápita, $y_t \equiv Y_t/L_t$. Obsérvese que si la función de producción, $F(\cdot)$, es neoclásica, presenta rendimientos constantes a escala, por lo que se cumple que $F(\lambda K, \lambda L, A) = \lambda F(K, L, A)$, donde λ es una constante arbitraria. Si damos a la constante el valor de $\lambda = \frac{1}{L}$, esta condición se puede escribir como

$$y \equiv \frac{Y}{L} = \frac{1}{L}F(K, L, A) = F\left(\frac{1}{L}K, \frac{1}{L}L, A\right) = F(k, 1, A) \equiv f(k, A), \qquad [1.10]$$

donde hemos definido $f(k, A) \equiv F(k, 1, A)$. Es decir, la producción per cápita es una función del capital per cápita y la tecnología. En el caso de la función de producción Cobb-Douglas, esto se puede ver claramente dado que

$$y \equiv \frac{Y}{L} = \frac{1}{L} AK^{\alpha} L^{1-\alpha} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}\left(\frac{L}{L}\right)^{1-\alpha} = Ak^{\alpha}(1)^{1-\alpha} = Ak^{\alpha} \qquad [1.11]$$

Un supuesto adicional es que la población crece a una tasa exógena y constante que denotaremos con la letra n. Es decir, definimos n como $\frac{\dot{L}}{L} \equiv n$.[8]

Utilizando este último supuesto, podemos calcular la tasa de crecimiento del capital por persona como

$$\dot{k}_t = \frac{\dot{K}_t L_t - \dot{L}_t K_t}{L_t^2} = \frac{\dot{K}_t}{L_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t}\frac{K_t}{L_t} = \frac{\dot{K}_t}{L_t} - nk_t \qquad [1.12]$$

Recordad que $\dot{k}$ es exactamente $\left(\frac{\dot{K}}{L}\right) \equiv \frac{d(K/L)}{dt}$.

Si substituimos el término $\dot{K}/L$ de [1.9] en [1.12] y utilizamos [1.10] obtenemos

$$\dot{k}_t = sf(k_t, A_t) - \delta k_t - nk_t. \qquad [1.13]$$

III.d. Nivel tecnológico constante

El último supuesto que haremos antes de analizar la solución del modelo es importante porque nos ayudará a descubrir uno de los problemas centrales del modelo neoclásico de crecimiento. Como nuestro objetivo ahora es analizar el papel de la inversión en capital como determinante de la tasa de crecimiento económico, será útil prescindir de todas las fuentes alternativas de crecimiento potencial. Una de estas fuentes potenciales, lo dijimos al principio del capítulo, es el progreso tecnológico. Si nuestro objetivo es ver si se puede crecer para siempre simplemente invirtiendo una fracción constante de la producción, será útil suponer que la tecnología no crece. Este supuesto se materializa algebraicamente en

$$A_t = A. \qquad [1.14]$$

[8] Una vez más, este supuesto no es muy realista dado que, si consideramos los datos, observaremos que la tasa de crecimiento de la población disminuye a medida que aumenta la riqueza de un país. La tasa de crecimiento de la población, pues, no es ni constante ni exógena sino que está relacionada con el nivel de riqueza de un país. Una vez más, sin embargo, dado que nuestro objetivo por ahora es estudiar el papel que desempeña la inversión en capital físico en el proceso de crecimiento económico, este supuesto nos simplificará sustancialmente el análisis. Los estudiosos del crecimiento económico han intentado incorporar el crecimiento endógeno de la población en modelos de crecimiento similares a los que estamos describiendo en este capítulo. Para un estudio detallado véase Barro y Sala-i-Martin (1995, capítulo 9).

donde A es una constante. Substituyendo [1.14] en [1.13] obtenemos una ecuación muy importante llamada *la ecuación fundamental del modelo de Solow-Swan*:

$$\dot{k}_t = sf(k_t, A) - (\delta + n)k_t. \tag{1.15}$$

Si la tecnología es Cobb-Douglas, entonces la ecuación fundamental de Solow-Swan se escribe como

$$\dot{k}_t = sAk_t^{\alpha} - (\delta + n)k_t. \tag{1.15'}$$

Dado el stock de capital per cápita existente en la economía en el momento t, la ecuación fundamental de Solow-Swan nos revela cuál será el *incremento* del stock de capital per cápita en el próximo instante, $\dot{k}_t$. Observe el lector que, una vez conozcamos el incremento del stock de capital por persona sabremos cuál será el stock de capital en el siguiente instante. En consecuencia, la ecuación fundamental de Solow-Swan nos indica cuál será el *incremento* del stock de capital per cápita en el próximo instante, y así sucesivamente hasta infinito. Dicho de otro modo: la ecuación [1.15] nos describe cómo evolucionará el stock de capital per cápita desde hoy hasta el fin de los tiempos. De ahí la importancia de esta ecuación.

Antes de extraer lecciones de esta ecuación fundamental, es preciso recordar que una vez conocida la evolución del stock de capital por persona a través del tiempo, sabremos cuál es la evolución del producto per cápita porque $y_t = f(k_t, A)$. Como A es constante y el producto, y, es una función monotónica de k, los movimientos de k se reflejarán en movimientos de y. Por este motivo será útil estudiar el comportamiento dinámico de k.

III.e. Interpretación de [1.15]

La ecuación [1.15] tiene una simple interpretación económica: el stock de capital por persona aumenta con la diferencia entre el ahorro bruto de la economía y el término $(\delta + n)k$. Cuando aumenta la tasa de ahorro (que, recordémoslo, en una economía cerrada es igual a la tasa de inversión), la inversión agregada aumenta. Como la inversión sirve para aumentar la cantidad de máquinas, el stock de capital aumenta, por lo que el primer término de [1.15] es fácil de entender. El término δk también es de fácil compresión: cuanto mayor es la fracción de máquinas que se deprecia en un momento dado, δ, menor es el aumento en el stock de capital por persona (y por esto el término δk aparece con signo negativo en [1.15]). El término nk puede parecer un poco más difícil de entender pero es igualmente sencillo. Imaginemos por un instante que $s = 0$. El primer término de la derecha de [1.15] es igual a cero y la inversión es cero. La ecuación [1.15] nos dice que el stock de capital PER CÁPITA disminuye por dos razones: la primera es que una fracción del capital se deteriora o deprecia a cada momento. La segunda razón por la que el stock de capital PER CÁPITA decrece si no se invierte nada es que el número de cápitas o personas aumenta. Esto es lo que refleja el término nk.

1.3 Análisis del estado estacionario

La ecuación fundamental del modelo de Solow-Swan nos indica el aumento del stock de capital por persona como función de algunas constantes (A, s, δ o n) y del stock de capital existente, k. Hay que resaltar que la ecuación se cumple en cada momento del tiempo, desde el momento inicial (hoy) hasta infinito. Existe, pues, una ecuación como [1.15] para cada momento del tiempo aunque, para simplificar, aquí sólo escribamos una. Para simplificar la notación, sin embargo, a partir de ahora escribiremos las ecuaciones sin los subíndices temporales, t, siempre y cuando esta simplificación no cree confusión. El lector debe recordar, de todas maneras, que a pesar de que omitamos los subíndices temporales, estamos estudiando un modelo dinámico que nos describe el comportamiento de la economía a lo largo del tiempo.

Una manera sencilla de analizar las predicciones del modelo es con un gráfico.

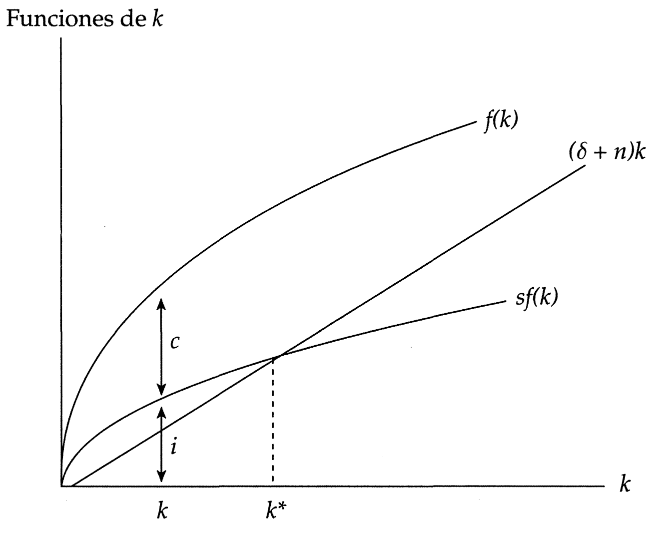

Gráfico 1.1. El estado estacionario en el modelo neoclásico de Solow-Swan.

En el gráfico 1.1 se presentan las diferentes funciones que caracterizan el modelo de Solow-Swan. Como todas ellas son funciones del capital, ponemos k en el eje horizontal. La primera función importante es la de producción, $f(k)$. Como se trata de una función neoclásica, $f(k)$ es siempre creciente (el producto marginal del capital es positivo) y es cóncava (existen rendimientos decrecientes del capital). Además, la función de producción es vertical cuando el capital es cero (la condición de Inada requiere que el producto marginal del capital, que es la pendiente de $f(k)$, sea infinito cuando k se aproxima a cero) y que esta pendiente se vuelva horizontal cuando k se acerca a infinito (ésta es la otra condición de Inada para el capital que dice que el producto marginal del capital se aproxima a cero cuando el capital va hacia infinito). Todas estas propiedades se pueden comprobar tomando la función de producción Cobb-Douglas, $y = Ak^{\alpha}$. Obsérvese que la derivada de esta función con respecto a k es $y' = \alpha A k^{\alpha-1} = \frac{\alpha A}{k^{1-\alpha}}$. Esta derivada es positiva para todos los niveles de capital positivos (recuérdese que α es una constante entre cero y uno). También vemos que esta derivada es infinita cuando k es cero (nótese que k aparece en el denominador con exponente positivo) y que se acerca a cero cuando k va a infinito. Es decir, es vertical en el origen y es asintóticamente horizontal. Finalmente, la función es cóncava, ya que el producto marginal es decreciente (la segunda derivada es negativa: $y'' = -\frac{\alpha(1-\alpha)A}{k^{2-\alpha}} < 0$). Estas características están representadas en el gráfico 1.1.

Según la ecuación fundamental de Solow-Swan, el aumento de capital per cápita es igual a la diferencia entre dos funciones. Para hacer el análisis más ameno, bautizaremos la función $sf(k)$ con el nombre de *curva de ahorro* y la función $(\delta + n)k$ con el nombre de *curva de depreciación* (recordemos que el término depreciación debe interpretarse en un sentido amplio que incluye el hecho de que el capital *por persona* se reduce o "deprecia" cuando aumenta el número de personas, y esto es lo que señala el término nk).

La función $sf(k)$ es proporcional a la función de producción dado que s es una constante. Por lo tanto, la curva de ahorro también es creciente, cóncava, vertical en el origen y asintóticamente horizontal. Como la tasa de ahorro es un número menor que uno, la función $sf(k)$ es proporcionalmente inferior a $f(k)$. Es por ello que en el gráfico 1.1 aparece por debajo de la función de producción.

Finalmente, la función $(\delta + n)k$ es una línea recta que pasa por el origen y que tiene una pendiente constante e igual a $\delta + n$.

Lo primero que hay que notar de las curvas descritas es que, cuando $k = 0$, la función $sf(k)$ y la función $(\delta + n)k$ son iguales a cero por lo que se cruzan en el origen. El punto $k = 0$ implica que no hay producción ni economía. Este punto no es interesante económicamente y vamos a ignorarlo. Lo interesante de $k = 0$ es que, en este punto, la curva de ahorro es vertical y la de depreciación tiene una pendiente finita (e igual a $\delta + n$). Se deduce, pues, que para valores de k cercanos a cero la curva de ahorro está por encima de la curva de depreciación. La pendiente de la curva de ahorro va decreciendo a medida que k aumenta. Como sabemos que la pendiente de $sf(k)$ va cayendo hacia cero, sabemos que existe un valor de k donde las curvas de ahorro e inversión se cruzan. Dado que, después de este punto, la pendiente de la función $sf(k)$ sigue decreciendo mientras que $(\delta + n)k$ sigue siendo una línea recta, las dos curvas no se vuelven a cruzar más. En resumen, si ignoramos el origen, *las curvas de ahorro y depreciación deben necesariamente cruzarse una vez y solamente una.*

El punto k^* donde las dos curvas se cruzan se llama *estado estacionario.* Si la economía (por la razón que sea) se encuentra en el punto k^*, entonces la curva de depreciación es igual a la curva de ahorro. La ecuación fundamental de Solow-Swan nos dice que cuando $sf(k)$ es igual a $(\delta + n)k$, entonces $\dot{k} = 0$ y el capital no aumenta. Si el capital no aumenta, en el siguiente instante k vuelve a tomar el valor k^*. En este punto, se cumple otra vez que $sf(k)$ es igual a $(\delta + n)k$ y, de nuevo, $\dot{k} = 0$. Así sucesivamente hasta el final de los tiempos. Es decir, si la economía se encuentra en k^*, entonces se quedará en este punto para siempre. El stock de capital k^* que tiene esta propiedad se llama el *stock de capital de estado estacionario.* La intuición económica es la siguiente: la economía ahorra e invierte una fracción constante, s, de la cantidad producida. Esta inversión se utiliza para aumentar el stock de capital y para reemplazar el capital depreciado. Cuando la economía tiene un stock de capital k^*, la cantidad producida, $f(k^*)$, es tal que si ahorramos la fracción s, obtenemos una cantidad de inversión que es justamente la necesaria para reemplazar el capital depreciado. Es decir, una vez reemplazado el capital depreciado, no quedan recursos para incrementar el stock de capital, por lo que éste permanece al mismo nivel, k^*. Al permanecer el capital al mismo nivel, la producción vuelve a ser la misma de manera que, al ahorrar la misma fracción, s, se genera la misma inversión y se repite el mismo resultado. La economía no consigue aumentar el stock de capital y permanece con el mismo stock hasta el final de los tiempos.

Es fácil encontrar una fórmula para k^* si la función de producción es Cobb-Douglas: basta con poner $\dot{k} = 0$ en [1.15′]: $sA(k^*)^\alpha = (\delta+n)k^*$. Despejando obtenemos una expresión para el stock de capital de estado estacionario:

$$k^* = \left(\frac{sA}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad [1.16]$$

Como el stock de capital per cápita de estado estacionario es constante, el PIB per cápita (que es una función de k) también es constante, por lo que $\gamma_y^* = 0$. Dado que el consumo es una fracción constante de y, también se debe cumplir que el consumo de estado estacionario es constante y, en consecuencia, su tasa de crecimiento es cero, $\gamma_c^* = 0$. Es decir, en el estado estacionario, todas las variables expresadas en términos per cápita son constantes y sus tasas de crecimiento estacionario deben ser cero.

El hecho de que las variables en términos per cápita sean constantes en el largo plazo quiere decir que sus correspondientes valores agregados crecen al mismo ritmo que la población. Esto se puede ver utilizando la definición de variable per cápita: $K = kL$. Tomando logaritmos y derivadas tenemos que $\gamma_K = \gamma_k + \gamma_L = \gamma_k + n$. En el estado estacionario se cumple que $\gamma_k^* = 0$ y $\gamma_K^* = n$. Una derivación similar nos mostrará que las tasas de crecimiento del consumo *agregado* y el PIB *agregado* también son iguales a n en el estado estacionario: $\gamma_C^* = \gamma_Y^* = \gamma_K^* = n$.

La ecuación [1.16] nos muestra que el stock de capital per cápita de estado estacionario, k^*, aumenta cuando la tasa de ahorro, s, o el nivel tecnológico, A, aumentan y se reduce cuando la tasa de depreciación, δ, o la tasa de crecimiento de la población, n, aumentan. Estos resultados también se pueden ver gráficamente. En el gráfico 1.2, un aumento de la tasa de ahorro hace saltar la curva de ahorro hacia arriba, por lo que la intersección con la curva de depreciación se produce en un stock de capital, k^{**}, superior. Es decir, el stock de capital de estado estacionario asociado con una tasa de ahorro más elevada es mayor.

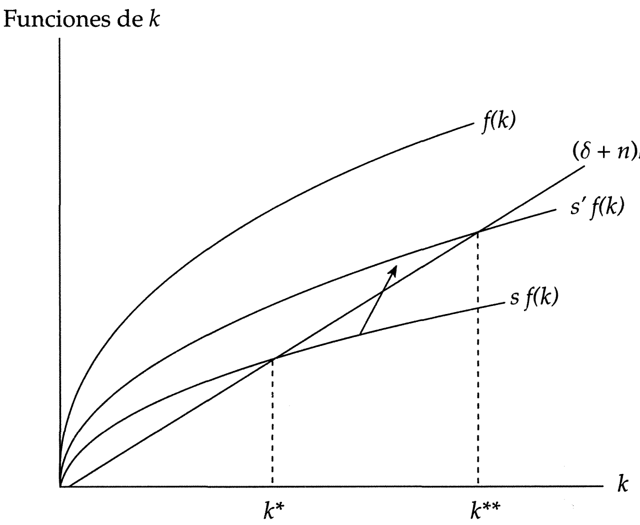

Gráfico 1.2. Aumento de la tasa de ahorro.

Como el nivel de producción per cápita es una función del stock de capital, el nivel de renta de estado estacionario será también una función creciente de la tasa de ahorro. Es decir, en el estado estacionario, los países ricos (renta per cápita elevada) serán los que tendrán unas tasas de ahorro mayores.

Una mejora tecnológica (un aumento de A) también haría saltar la curva de ahorro hacia arriba, por lo que el stock de capital de estado estacionario también aumentaría.

Cuando se produce un aumento de la tasa de depreciación, δ, o de la tasa de crecimiento de la población, n, entonces la pendiente de la curva de depreciación aumenta y la curva $(\delta + n)k$ salta hacia arriba, como se muestra en el gráfico 1.3. La curva de ahorro y la de depreciación se cortan ahora en un nivel de capital inferior por lo que el stock de capital de estado estacionario disminuye.

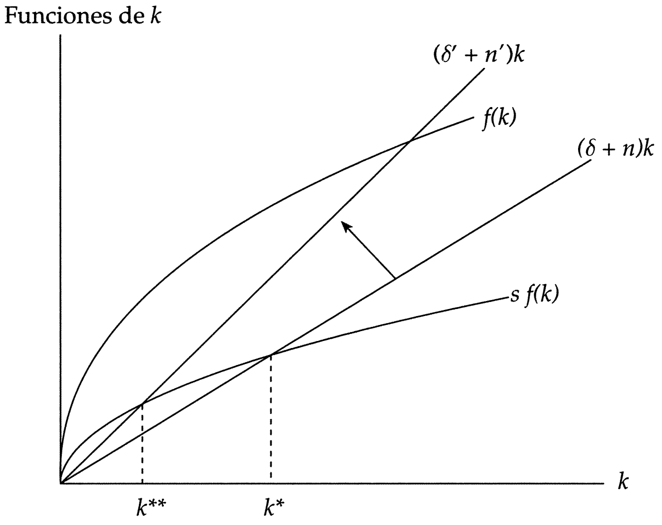

Gráfico 1.3. Aumento de la tasa de depreciación, δ, o de la tasa de crecimiento de la población, n.

Hemos visto que los gráficos 1.1, 1.2 y 1.3 nos sirven para comprobar que el estado estacionario existe y es único. También nos han servido para ver la relación entre los diferentes parámetros de la economía y el stock de capital de estado estacionario. Veremos a continuación que estos gráficos también pueden ser utilizados para establecer que el estado estacionario es estable, en el sentido de que si el stock de capital inicial es inferior a k^*, entonces el capital se acumula de manera que k converge hacia k^* y si el capital inicial es superior a k^*, entonces el capital disminuye hasta, nuevamente, alcanzar el estado estacionario. Para verlo, nos bastará con comprobar que a la izquierda de k^* la curva de ahorro es superior a la curva de depreciación. En esta región, pues, la ecuación fundamental de Solow-Swan nos dice que $\dot{k} > 0$ por lo que el capital aumenta. Dicho de otro modo, cuando el capital es inferior al nivel de estado estacionario, el capital aumenta. Lo contrario ocurre a la derecha de k^*, donde la curva de ahorro es inferior a la de depreciación y $\dot{k} < 0$. Resumiendo, el estado estacionario es estable dado que, tengamos el capital que tengamos, la dinámica del modelo nos hace gravitar hacia el estado estacionario.

La "Regla de oro" de la acumulación de capital

En el gráfico 1.2 vemos que para cada tasa de ahorro, s, existe un stock de capital estacionario k^*. Imaginemos que, a través de políticas de incentivos fiscales, un país puede cambiar su tasa de ahorro al nivel que más desee. Una pregunta importante es: ¿qué nivel escogerá?

El objetivo de una sociedad debe ser el aumento del nivel de bienestar de sus individuos. En principio, este bienestar no depende de la cantidad de *bienes producidos* ni siquiera de la cantidad de *capital* existente sino de la cantidad de producto que las familias *consumen*. Es decir, la sociedad escogerá una tasa de ahorro que comporte un mayor nivel de consumo per cápita. El estado estacionario que conlleva el *mayor* nivel de consumo per cápita se llama *la Regla de oro de la acumulación de capital* y lo denotaremos con k_{oro}.[9]

Para encontrar el stock de capital de Regla de oro, lo primero que debemos observar es que estamos hablando de estados estacionarios, por lo que $\dot{k} = 0$. Si tenemos en cuenta que el ahorro es igual a la producción menos el consumo, podemos reescribir 1.15 para expresar el consumo de estado estacionario, c^*, como función del capital de estado estacionario, k^*:

$$0 = f(k^*) - c^* - (\delta + n)k^* \rightarrow c^* = f(k^*) - (\delta + n)k^*. \quad [1.17]$$

La ecuación (1.17) nos dice que, en el estado estacionario, el consumo es igual a la diferencia entre la producción y la depreciación. Un aumento del capital tiene dos efectos sobre el consumo de estado estacionario: por un lado aumenta la producción, $f(k^*)$ y por otro lado, aumenta la cantidad de máquinas que es necesario reemplazar, $(\delta + n)k^*$.

Para encontrar el capital de Regla de oro, basta con maximizar el consumo de estado estacionario con respecto a k^*. Para ello, tomamos derivadas de c^* con respecto a k^* y obtenemos:

$$\frac{dc^*}{dk^*} = f'(k^*) - (\delta + n) = 0 \rightarrow f'(k_{oro}) = \delta + n. \quad [1.18]$$

En el gráfico 1.4 comprobamos que la distancia entre la función de producción y la recta de depreciación es el consumo de estado estacionario. Observamos también que el punto donde la distancia entre las dos curvas es máxima es aquel en que la función de producción es paralela a la curva de depreciación, por lo que la pendiente de la primera es igual a $\delta + n$, que es lo que hemos encontrado algebraicamente.

[9] Este nombre lo ideó Phelps (1961) y lo basó en el Nuevo Testamento, donde Jesús resumió la "Regla de oro" de la conducta humana en dos mandamientos. El Evangelio según San Mateo nos da la clave: *"Los fariseos, al oír que había hecho callar a los saduceos, formaron grupo y uno de ellos, que era experto, le preguntó para ponerlo a prueba: Maestro, ¿cuál es el mandamiento principal de la Ley? Jesús le dijo: 'Amarás al Señor tu Dios con todo tu corazón, con toda tu alma, con todo tu ser. Este mandamiento es el principal y primero. El segundo es semejante a él: 'Amarás a tu prójimo como a ti mismo'. Estos dos mandamientos sostienen la Ley entera y los profetas"*. (Mateo, 22, 33-40).

Traducido a la teoría del crecimiento, el segundo de los mandamientos quiere decir que la sociedad actual no debe intentar aumentar su consumo si la consecuencia de ello es que el consumo de las generaciones futuras se reduce, ya que no nos gustaría que las generaciones futuras nos lo hicieran a nosotros si se invirtieran los papeles y nos tocara después que ellos. La Regla de oro de la conducta diría, por lo tanto, que la sociedad debe maximizar el *consumo de estado estacionario*: el que hace que nuestro consumo sea idéntico al de las generaciones venideras.

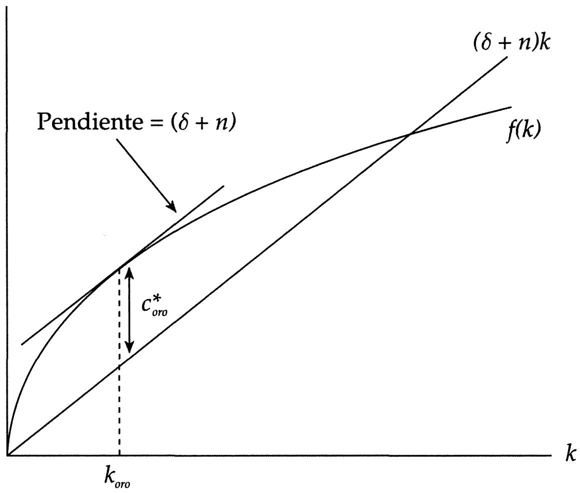

Gráfico 1.4. La Regla de oro de la acumulación de capital.

Recuérdese que no hay nada en este modelo que nos diga que la economía tenderá a ir hacia la Regla de oro. Para alcanzar este punto, habrá que escoger la tasa de ahorro que haga que el estado estacionario sea precisamente k_{oro}.

Si la tasa de ahorro es superior a s_{oro}, entonces el stock de capital será superior a k_{oro}, mientras que si la tasa de ahorro es inferior a s_{oro}, entonces el stock de capital será inferior a k_{oro}. Como sucede en el gráfico 1.5.

Además de ser el stock de capital que maximiza el consumo de estado estacionario, k_{oro} es importante por otra razón: si la economía se encuentra a la derecha de este punto, seguro que la economía es *ineficiente*. Para ilustrar este hecho, consideremos una economía con una tasa de ahorro superior a s_{oro}.

Esta economía podría aumentar claramente el consumo de estado estacionario si redujera la tasa de ahorro al nivel de Regla de oro, s_{oro}, ya que, por definición, el consumo asociado con esta tasa de ahorro es máximo. Ahora bien, nótese que reducir la tasa de ahorro es equivalente a aumentar el consumo inmediatamente. En el gráfico 1.6, al reducir la tasa de ahorro, la curva de ahorro salta hacia abajo. En el momento del cambio, el consumo aumenta a c_0. A partir de ese momento, la diferencia entre ahorro y depreciación es negativa, por lo que el capital empieza a decrecer. La economía se mueve hacia la izquierda. Durante esta transición, el consumo es la distancia entre la producción, $f(k)$, y la curva de ahorro, $s_{oro}f(k)$. La trayectoria del consumo en el tiempo se describe en el gráfico 1.7. A lo largo de la transición, el consumo es superior al que había en el anterior estado estacionario.

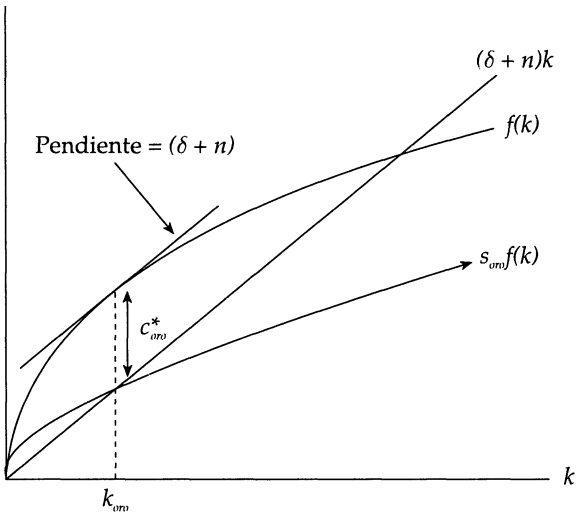

Gráfico 1.5. Tasa de consumo que genera la Regla de oro.

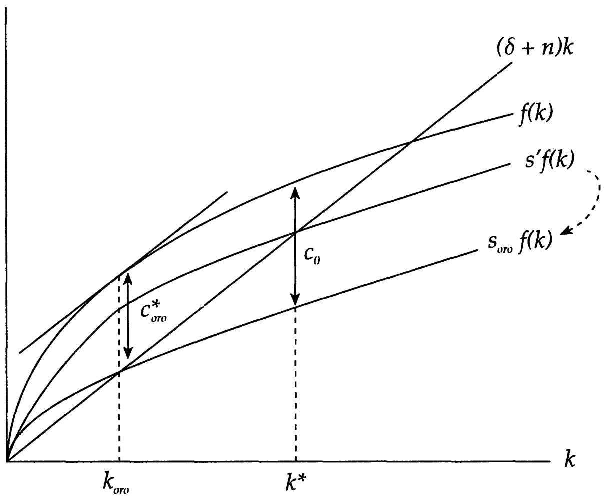

Gráfico 1.6. Tasa de ahorro superior a la de la Regla de oro ($s' > s_{oro}$).

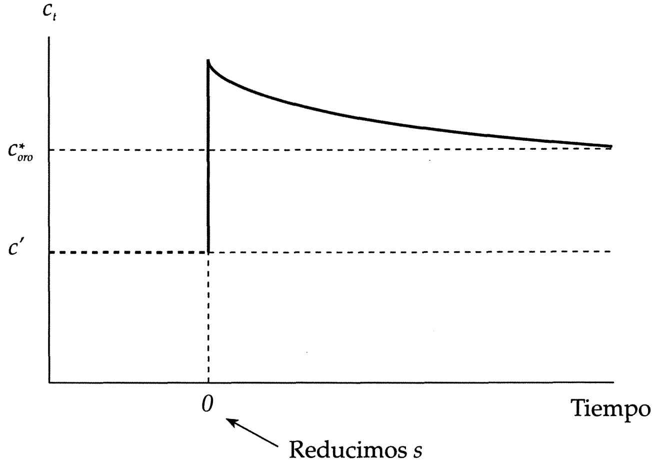

Gráfico 1.7. Comportamiento del consumo cuando se reduce s y la tasa de ahorro inicial está por encima de s_{oro}.

A largo plazo, la economía converge a k_{oro}, donde, como ya hemos indicado, el consumo también es superior al que había en k^*. Es decir, a partir del momento en que reducimos la tasa de ahorro, el consumo es siempre superior al que había cuando la tasa de ahorro era s'. Dicho de otro modo, si nos encontramos en k^* y reducimos la tasa de ahorro a s_{oro} conseguiremos aumentar el consumo en todos los momentos del tiempo. Si a los ciudadanos de nuestra economía les gusta el consumo (como estamos suponiendo), bajar la tasa de ahorro será una política que les hará más felices sea cual sea su función de utilidad. Es decir, mantener una tasa de ahorro superior a s_{oro} no puede ser bueno. Es por esta razón que cuando una economía se encuentra a la derecha de la Regla de oro decimos que se encuentra en una zona de *ineficiencia dinámica.*

Una manera alternativa de representar la zona de ineficiencia dinámica (y que se utiliza a menudo en la literatura sobre crecimiento económico) relaciona el tipo de interés con la tasa de crecimiento económico agregado. En el capítulo 3 mostraremos que el tipo de interés, que denotaremos con la letra r, es igual al producto marginal del capital menos la depreciación: $r = f'(k) - \delta$. En el estado estacionario el tipo de interés es igual a $r^* = f'(k^*) - \delta$. Para los estados estacionarios de la zona dinámicamente ineficiente (los situados a la derecha de k_{oro}) se cumple que $f'(k^*) - \delta < f'(k_{oro}) - \delta$. Como $f'(k_{oro}) = \delta + n$, en la zona ineficiente se cumple $f'(k^*) - \delta < n$. En el estado estacionario, la tasa de crecimiento del capital (y del PIB) *per cápita* es igual a cero y la tasa de crecimiento agregado es igual a $\gamma^*_K = \gamma^*_Y = n$. Substituyendo estos términos en la desigualdad que describe la zona dinámicamente ineficiente tenemos que $r^* = f'(k^*) - \delta < n = \gamma^*_Y$. En resumen, *una condición que caracteriza la zona* *dinámicamente ineficiente es que la tasa de interés real sea inferior a la tasa de crecimiento agregado,* $r^* < \gamma_Y^*$.

Es interesante comparar la situación de ahorro excesivo con la que ocurre cuando la tasa de ahorro es inferior a s_{oro}. En este caso, el capital de estado estacionario, k^*, es inferior al de la Regla de oro.

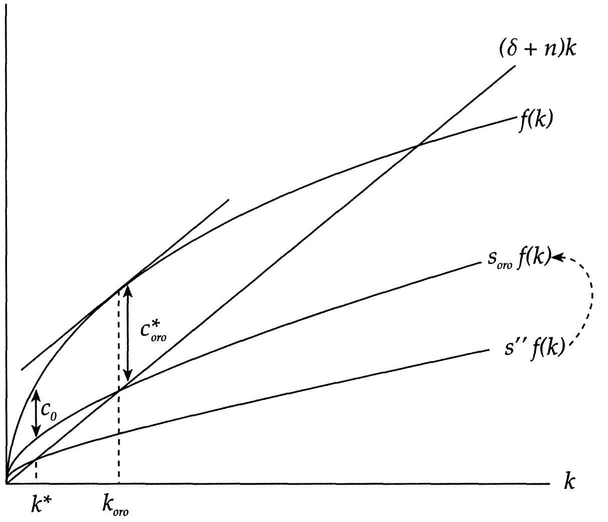

Gráfico 1.8. Tasa de ahorro inferior a la de la Regla de oro ($s'' < s_{oro}$).

El estado puede aumentar el consumo de estado estacionario adoptando la tasa de ahorro s_{oro}. El gráfico 1.8 muestra el comportamiento de la economía en este caso: para llegar a la Regla de oro, es necesario aumentar la tasa de ahorro, por lo que, en el momento de adoptar esa política, la curva de ahorro saltará hacia arriba. Dado que el capital que la economía tiene en este momento no ha cambiado, k^*, la cantidad disponible para el consumo en el momento inicial debe disminuir puesto que la inversión y el ahorro toman una fracción mayor de la producción. A medida que la economía converge hacia k_{oro}, el consumo per cápita crece. Llega un momento en que el consumo alcanza el nivel que tenía en la situación anterior e incluso sobrepasa ese nivel para llegar al consumo c^*_{oro}. La trayectoria del consumo en el tiempo se dibuja en el gráfico 1.9.

Observamos que, tras el descenso inicial, el consumo se recupera y converge hasta llegar a c^*_{oro}. Para decidir si conviene adoptar la política de aumentar la tasa de ahorro cuando ésta es demasiado baja, es necesario saber si el aumento del consumo a largo plazo compensa la reducción inicial. Es decir, para poder evaluar esta política necesitamos una función de utilidad que nos permita comparar la pérdida de consumo a corto plazo con la ganancia a largo plazo. Una economía que sea muy

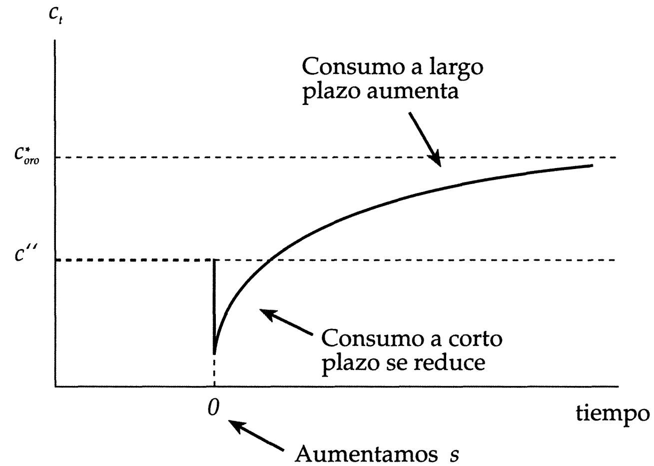

Gráfico 1.9. Comportamiento del consumo cuando se incrementa s y la tasa de ahorro inicial está por debajo de s_{oro}.

impaciente, en el sentido de que valore mucho el corto plazo, decidirá no sacrificar el consumo inmediato a cambio de ganancias futuras. Es por ello que, a diferencia de lo que ocurría a la derecha de k_{oro}, no podemos afirmar sin ambigüedades que las economías situadas a la izquierda de k_{oro} sean ineficientes.

La lección fundamental de esta sección es que, mientras podemos asegurar sin ambigüedad que ahorrar e invertir *demasiado* es malo, no se puede decir lo mismo de ahorrar e invertir *demasiado poco*. La intuición es que, si inviertes demasiado, la solución pasa por reducir la inversión, por lo que el consumo a corto plazo aumenta como también lo hace el consumo a largo plazo. Por contra, si se invierte demasiado poco, entonces la solución es el aumento de la inversión, lo que conlleva una reducción inmediata de la producción disponible para el consumo a corto plazo. Para evaluar la bondad de esta política necesitamos sopesar el corto plazo y el largo plazo.

1.4 La tasa de crecimiento a lo largo del tiempo

La dinámica analizada hasta ahora nos mostraba como el capital, el consumo, la inversión y la producción variaban a lo largo del tiempo respondiendo a diferentes cambios de política económica. Pero el comportamiento de las *tasas de crecimiento* no se podía analizar con los gráficos presentados hasta ahora. Como éste es un libro sobre crecimiento económico, será preciso efectuar un pequeño cambio en nuestro análisis para mostrar el comportamiento de las tasas de crecimiento en el tiempo.

Para empezar, señalemos que la producción es una función creciente del capital. En el caso Cobb-Douglas, esto significa que la tasa de crecimiento del PIB per cápita es proporcional a la tasa de crecimiento del capital per cápita,

$$\gamma_y \equiv \frac{\dot{y}}{y} = \alpha\frac{\dot{k}}{k} \equiv \alpha\gamma_k. \tag{1.19}$$

Además, como el consumo per cápita es proporcional al producto per cápita ($c = (1 - s)y$), tenemos que la tasa de crecimiento del consumo es igual a la tasa de crecimiento de la producción ($\gamma_c = \gamma_y$). Dicho de otro modo, si analizamos el comportamiento de la tasa de crecimiento del capital sabremos también cómo se comporta la tasa de crecimiento del PIB y del consumo per cápita. Este es un resultado muy útil porque una simple división de la ecuación fundamental de Solow-Swan por el stock de capital per cápita, k, nos da la tasa de crecimiento del capital. Dividimos los dos lados de [1.15] por k y obtenemos

$$\gamma_k \equiv \frac{\dot{k}}{k} = s\frac{f(k, A)}{k} - (\delta + n). \tag{1.20}$$

Esta ecuación sigue siendo la *ecuación fundamental del modelo de Solow-Swan* (lo único que ha pasado es que hemos divido ambos lados de la ecuación por k, pero es la misma ecuación). El miembro de la izquierda de esta ecuación representa la tasa instantánea de crecimiento del capital per cápita. El miembro de la derecha nos indica que esta tasa de crecimiento viene dada por la diferencia entre dos funciones: $sf(k, A)/k$, y $(\delta + n)$. Como estos dos factores siguen siendo la *curva de ahorro* y la *curva de depreciación* que habíamos descrito en el apartado anterior (lo único que ha pasado es que hemos dividido ambas por k), seguiremos utilizando el mismo nombre. Esta versión de la ecuación fundamental de Solow-Swan nos dice que la tasa de crecimiento del capital per cápita es igual a la diferencia entre el ahorro (e inversión) por unidad de capital y la tasa de depreciación (incluyendo la tasa de crecimiento de la población). Cuanto mayor sea la tasa de ahorro, s, mayor será la tasa de crecimiento de la economía. Cuanto mayor sea el nivel tecnológico, A, mayor será el producto, $f(\cdot)$, y por lo tanto, mayor será la cantidad de producto ahorrada e invertida. Cuanto mayor sea la tasa de depreciación, menor será la tasa de crecimiento y, finalmente, cuanto mayor sea la tasa de crecimiento de la población, más reducido será el crecimiento del capital por persona.

La primera función del lado derecho de [1.20] no es más que la tasa de ahorro multiplicada por el *producto medio* del capital, $f(k, A)/k$. En el caso Cobb-Douglas, este producto medio es igual a $f(k, A) = Ak^{\alpha-1}$ y la tasa de crecimiento del capital por persona se puede escribir como

$$\gamma_k \equiv \frac{\dot{k}}{k} = sAk^{-(1-\alpha)} - (\delta + n). \tag{1.20'}$$

Para dibujar la curva de ahorro, $sAk^{-(1-\alpha)}$, como función de k, es preciso tener en cuenta que:

(1) es una función decreciente para todo k.

(2) tiende a infinito cuando k tiende a cero (recordemos que $sAk^{-(1-\alpha)} = \frac{sA}{k^{1-\alpha}}$, por lo que k aparece en el denominador con un exponente positivo. Cuando el denominador tiende a cero, la fracción tiende a infinito).
(3) tiende a cero cuando k tiende a infinito.[10]

Es decir, la curva de ahorro toma valores infinitos cuando k es cero, decrece constantemente y se aproxima a cero para valores grandes de k. En el gráfico 1.10 se dibuja la curva de ahorro y se denota con las iniciales CA.

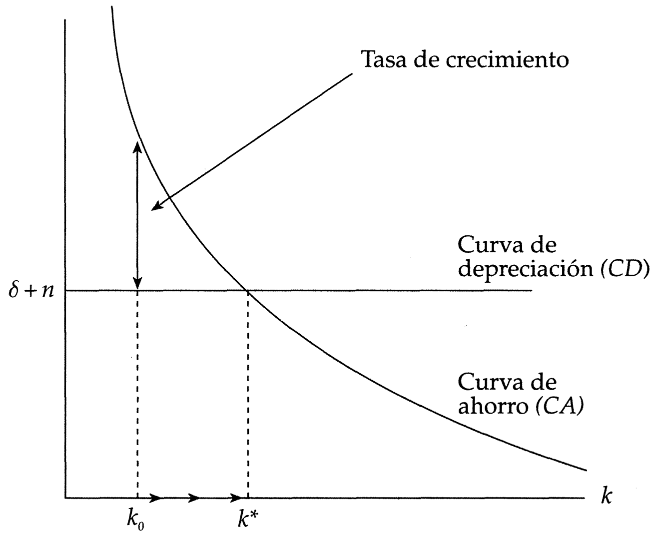

Gráfico 1.10. Dinámica de transición en el modelo neoclásico de Solow-Swan.

La *curva de depreciación*, $\delta + n$, es independiente de k y está representada por una línea recta horizontal en el gráfico 1.10. Esta curva se denota con las iniciales CD. Dado que la curva de depreciación es estrictamente positiva y que la curva de ahorro toma todos los valores entre ∞ y 0, las dos curvas se cruzan al menos una vez. Como la curva de ahorro es estrictamente decreciente, las dos curvas se cruzarán solamente una vez en el cuadrante positivo del gráfico (para que se cruzaran dos veces, la curva de ahorro tendría que tener algún tramo creciente, lo cual no pasa si la función de producción es neoclásica y, por lo tanto, presenta rendimientos decrecientes del capital). El valor de k para el cual ambas curvas se cruzan, k^*, es el stock de capital per cápita de estado estacionario que hemos visto anteriormente, $k^* = \left(\frac{sA}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Acabamos

[10] El lector puede demostrar que estas propiedades de la *curva de ahorro* se cumplen no solamente para el caso de la función de producción Cobb-Douglas, sino también para cualquier función de producción neoclásica que satisfaga las propiedades descritas en II.b.

de argumentar que las dos curvas se cruzan una vez y sólo una vez, por lo que el capital por trabajador de estado estacionario *existe y es único*.

Podemos emplear el gráfico 1.10 para estudiar el comportamiento de la tasa de crecimiento en el tiempo. Según la ecuación de crecimiento [1.20], la tasa de crecimiento de k viene dada por la diferencia vertical entre las dos curvas. Vemos que la tasa de crecimiento es positiva para valores de k inferiores a k^*, $k < k^*$, y negativa para valores superiores a k^*, $k > k^*$. Además, la tasa de crecimiento es tanto mayor cuanto más por debajo está la economía del estado estacionario. Tomemos una economía con un capital inicial k_0 inferior a k^*. La tasa de crecimiento del capital en los primeros momentos es grande, pero va disminuyendo monotónicamente con el paso del tiempo, al ir aproximándose la economía a su posición de estado estacionario. Cuando se alcanza este punto, el crecimiento se detiene. El comportamiento de la economía es simétrico cuando el capital inicial está por encima de k^*.

La explicación de la caída de la tasa de crecimiento a lo largo de la transición está en el supuesto de que los *rendimientos del capital son decrecientes*: cuando el stock de capital es bajo, cada aumento del stock de capital genera un *gran* aumento en la producción (esto es, la productividad marginal del capital es elevada). Puesto que, por hipótesis, los agentes ahorran e invierten una fracción constante del producto adicional, el aumento en el stock de capital es grande. Dado que la productividad del capital es decreciente, cada unidad adicional genera incrementos menores de producto a medida que k aumenta. Como los agentes siguen ahorrando un porcentaje constante de la producción, los aumentos adicionales del stock de capital son cada vez más reducidos. De hecho, se aproximarían a cero si el stock de capital fuera arbitrariamente grande. Antes de llegar a este extremo, no obstante, la economía alcanza un punto en el que los incrementos del stock de capital cubren exactamente la substitución del stock de capital que se ha depreciado y compensan el crecimiento de la población (a una tasa n). Este aumento es, pues, exactamente suficiente para mantener el capital per cápita a un nivel constante. Una vez que la economía alcanza esta situación, permanece en ella para siempre. Se trata del estado estacionario.

Este resultado es, a la vez, interesante y preocupante: por un lado hemos visto que si la función de producción es neoclásica, no solamente existe un punto en el que la economía deja de crecer, sino que además, con toda seguridad la economía se aproxima a este punto. Dicho de otro modo, ¡a largo plazo la economía debe dejar de crecer! Esta es una lección importantísima de la teoría neoclásica, que nos dice que el crecimiento a largo plazo no se puede alcanzar a base de invertir una fracción constante del PIB. Pero es una lección preocupante porque la experiencia de muchos países que han crecido durante los últimos 200 años nos muestra que es posible crecer a largo plazo. Empezamos a ver que el modelo simple de Solow-Swan no es una descripción razonable de lo que sucede en el mundo que nos rodea.

Un argumento intuitivo que podría parecer que explica lo que está pasando, pero que es falso es que, a medida que el capital crece, el producto marginal del capital disminuye debido a la ley de rendimientos decrecientes del capital. Esto, podría pensarse, lleva a los inversores a invertir cada vez menos (ya que la rentabilidad de la inversión disminuye). Aunque sea intuitivo, este razonamiento *no es válido*. La razón es que las familias de nuestro modelo ahorran e invierten una fracción *constante* de la renta. En particular, no reaccionan a ningún tipo de cambio en la tasa de rentabilidad, por lo que el mecanismo que actúa a través de la reducción en los incentivos para invertir no tiene cabida en nuestro modelo con tasas de ahorro constantes. Para hablar de este mecanismo deberemos esperar al capítulo 3, donde, allí sí, las empresas decidirán sus inversiones de acuerdo con la rentabilidad que les ofrezcan los mercados.

1.4.1. Aumentos en la tasa de ahorro

Se podría pensar que si nos encontramos en nuestro estado estacionario (y, por lo tanto, si nos encontramos en una situación de estancamiento permanente), una forma de generar crecimiento consistiera en la tasa de ahorro e inversión (recordemos que las tasas de ahorro e inversión coinciden cuando la economía es cerrada). De hecho, instituciones internacionales como el Banco Mundial a menudo recomiendan el aumento de la tasa de ahorro e inversión como la solución del problema del nulo crecimiento económico experimentado por muchas economías de nuestro mundo. Veamos cuáles son las predicciones del modelo neoclásico cuando la economía experimenta un aumento en la tasa de ahorro e inversión (en estos momentos no nos interesa saber cómo se consigue incentivar el ahorro y la inversión, aunque se supone que es a través de políticas fiscales. Lo que nos interesa saber es cuál será el comportamiento a corto, medio y largo plazo, de una economía que consigue aumentar su tasa de ahorro, s).

Si la tasa de ahorro s experimenta un aumento *repentino* y *permanente*, la curva de ahorro salta inmediatamente hacia la derecha. En el gráfico 1.11, la curva pasa de $CA1$ a $CA2$. Como, inicialmente, el capital que tiene la economía es todavía k^*, para este stock de capital la curva de ahorro está por encima de la curva de depreciación. La tasa de crecimiento de la economía pasa, pues, a ser positiva. Esto implica que el stock de capital comienza a desplazarse hacia la derecha. A medida que esto sucede, la distancia entre las curvas de ahorro y depreciación se reduce debido a la existencia de rendimientos decrecientes del capital. Eventualmente, la economía converge hacia un nuevo punto de estado estacionario con crecimiento nulo, k^{**}. En conclusión, una política de aumento de la tasa de inversión no consigue aumentar la tasa de crecimiento a largo plazo, a pesar de que consiga aumentar el crecimiento a corto plazo y el stock de capital per cápita de estado estacionario (y, con él, el PIB per cápita de estado estacionario). De hecho, ni siquiera está claro que dicha política sea buena, a pesar de que consigue aumentar el PIB per cápita a largo plazo. La razón es que, a corto plazo, el consumo se ha reducido, por lo que esta política no sería deseable si la gente fuera muy impaciente y valorara el presente mucho más

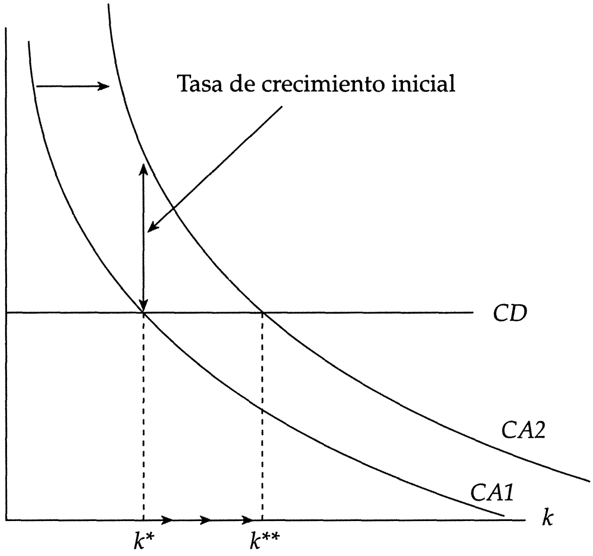

Gráfico 1.11. Aumento de la tasa de ahorro.

que el futuro. Es más, si el stock de capital inicial fuera superior a k_{oro}, entonces un aumento de la tasa de inversión sería claramente malo, tal como hemos señalado en la sección anterior.

El resultado obtenido nos vuelve a indicar que, en este modelo, no se puede explicar el crecimiento observado a muy largo plazo con la inversión en capital físico, dado que la ley de los rendimientos decrecientes del capital acaba por matar el crecimiento. Un aumento en la tasa de ahorro genera crecimiento positivo a lo largo de la transición, pero no genera crecimiento a largo plazo. Uno podría pensar que si volviéramos a aumentar s, entonces se generaría otro pequeño proceso de crecimiento hacia un nuevo estado estacionario. Una vez allí, podríamos volver a aumentar s. Sucesivos aumentos de la tasa de ahorro, podría pensarse, generarían sucesivos aumentos en la tasa de crecimiento. Si esto se hace a perpetuidad, la tasa de crecimiento podría ser siempre positiva. El problema de este argumento es que olvida que la tasa de ahorro es una *fracción*. Es decir, es un número que no puede nunca exceder de uno: una vez ahorramos todo lo que producimos no podemos aumentar la tasa de ahorro porque no hay nada más para ahorrar. Una vez llegado a ese límite, la tasa de ahorro no puede aumentar y la economía convergirá a un estado estacionario final sin crecimiento del que ya no podremos escapar.

La lección principal es, por lo tanto, que no se pueden generar aumentos permanentes en la tasa de crecimiento con políticas de ahorro e inversión.

1.4.2. Disminuciones en la tasa de crecimiento de la población

Otra política que el Banco Mundial recomienda a menudo a los países pobres es la reducción de la tasa de crecimiento de la población, n. Normalmente esto se consigue con las llamadas políticas de planificación familiar que reducen las tasas de natalidad (algunos países intentan reducir el crecimiento de la población simplemente obligando a las familias a tener un solo hijo y... ¡matar a los demás!). En este momento no nos importa tanto el saber cómo se consigue como el saber cuáles serán las implicaciones económicas de reducir el crecimiento de la población. En nuestro modelo, nos preguntamos qué pasará a corto, medio y largo plazo cuando el parámetro n disminuye permanentemente. Para ser más concretos, imaginamos que, en el momento inicial, la economía se encuentra en un estado estacionario, k^*, con crecimiento nulo.

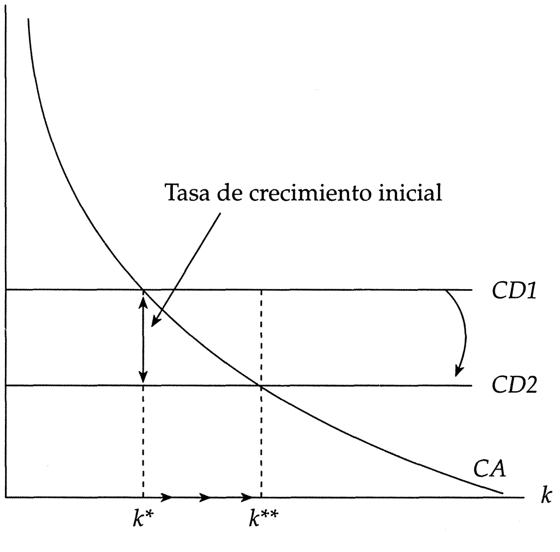

Gráfico 1.12. Reducción del crecimiento de la población, n.

El impacto inicial de esta política de natalidad es el salto de la curva de depreciación hacia abajo (en el gráfico 1.12 la curva de depreciación pasa de $CD1$ a $CD2$). En el momento inicial (cuando el stock de capital es todavía k^*) la curva de ahorro pasa por encima de la nueva curva de depreciación, por lo que el crecimiento de la economía pasa a ser positivo. A medida que el capital aumenta, la distancia entre las dos curvas disminuye, por lo que también lo hace la tasa de crecimiento. La economía converge finalmente al nuevo estado estacionario, k^{**}, con un capital per cápita superior, pero una tasa de crecimiento nula. El hecho de tener un PIB superior, sin embargo, no justifica necesariamente este tipo de políticas, ya que debemos tener en cuenta que a lo mejor las familias quieren tener muchos hijos. Es decir, es posible

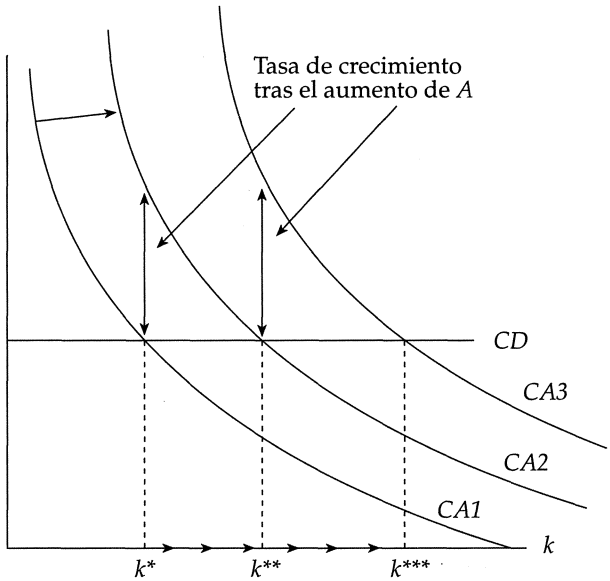

Gráfico 1.13. Progreso tecnológico.

que la familia típica china prefiera tener una renta un poco menor y no tener que sufrir la muerte del segundo hijo. Dejando de lado la optimalidad o deseabilidad de estas políticas, lo que sí está claro es que la reducción del crecimiento de la población tampoco genera crecimiento a largo plazo. Obsérvese que tampoco se puede generar crecimiento a largo plazo a base de reducir n repetidamente y a perpetuidad, dado que esto conllevaría tasas de crecimiento de la población cada vez más negativas, y la población mundial acabaría extinguiéndose.

1.5 Progreso tecnológico

La lección principal hasta ahora es que la acumulación de capital no puede explicar el crecimiento a largo plazo en un modelo neoclásico. Si esto es cierto, ¿cómo explicaban Solow y Swan el hecho de que Inglaterra, Estados Unidos o Francia hubieran crecido sin parar, durante los últimos 200 años? La respuesta que dieron fue, naturalmente, que todo este análisis se había hecho bajo el supuesto simplificador de una la tecnología constante. En realidad, sin embargo, la tecnología mejora con el paso del tiempo. Según la ecuación fundamental del modelo de Solow-Swan, un aumento del parámetro tecnológico, A, hace saltar la curva de ahorro hacia la derecha. En el gráfico 1.13, la curva de ahorro pasa de $CA1$ a $CA2$.

La evolución de las variables económicas tras un aumento permanente y exógeno de A es muy similar a lo que sucede ante un aumento de la tasa de ahorro: la tasa de crecimiento aumenta inmediatamente, por lo que también lo hace el capital. A medida que el capital aumenta, el producto marginal del capital disminuye, por lo que la tasa de crecimiento se reduce. A largo plazo, si no existe un nuevo aumento de A, la economía converge a un estado estacionario con un stock de capital y de PIB per cápita superior, pero con crecimiento nulo. La gran diferencia entre aumentos de s y aumentos de A es que los aumentos primeros no se pueden repetir indefinidamente, mientras que la tecnología puede mejorar una y otra vez sin límite. Obsérvese que si el parámetro A vuelve a aumentar, la curva de ahorro vuelve a saltar a la derecha (y pasa a ser $CA3$) y la economía vuelve a crecer durante un periodo de tiempo. Si los aumentos de A se repiten una y otra vez, la economía crecerá sin cesar. Como la imaginación humana no tiene límites, no hay por qué pensar que este proceso no pueda repetirse ilimitadamente, por lo que no hay por qué creer que el crecimiento a largo plazo será cero. Por lo tanto, el modelo neoclásico es compatible con el crecimiento continuado, pero sólo si existe progreso tecnológico continuado.

En el caso de que el nivel de la tecnología, A, aumente continuamente a una tasa constante x, la curva de ahorro se desplaza *continuamente* hacia la derecha. Es por ello que el stock de capital del estado estacionario también se desplaza hacia la derecha a la misma tasa, x. De este modo, la tasa de crecimiento de la economía en el estado estacionario, en términos per cápita, es positiva e igual a x.

Podemos demostrar que la tasa de crecimiento per cápita a largo plazo es positiva cuando la tecnología mejora de forma continuada. En el capítulo 4 se discutirán diferentes tipos de progreso tecnológico y se argumentará que, para que exista un estado estacionario, la tecnología debe estar *multiplicando el factor trabajo*. Por lo tanto, la función de producción debe poder escribirse como

$$Y_t = F(K_t, L_t A_t). \qquad [1.21]$$

es decir, la tecnología hace que el trabajo sea más eficiente: con la misma cantidad de trabajadores, L_t, un aumento en la *eficiencia* del trabajo hace que la producción aumente. Por este motivo, muchos economistas denominan el producto $\hat{L} \equiv L_t A_t$ *unidades de eficiencia del trabajo*. Obsérvese que este producto crece si crece la población, L, o si crece el nivel tecnológico, A. Como siempre, supondremos que L crece a una tasa *exógena constante* que denominamos n. Además, supondremos que A crece también a un ritmo *exógeno*[11] y *constante* que denotamos con la letra x. Por lo tanto, x será una medida del *progreso tecnológico*. Por ejemplo, si x = 0,02 cada trabajador es un 2 por ciento más eficiente cada año. La producción, Y, aumentará exactamente igual que si L hubiera crecido en un 2 por ciento. Como la población crece a un ritmo n y la tecnología crece a un ritmo x, el producto $\hat{L} = L_t A_t$ crece a un ritmo $n + x$.

[11] Exógeno quiere decir que la tecnología aumenta sin necesidad de que ningún miembro de la economía dedique esfuerzos o recursos para que ello suceda.

El análisis de una economía neoclásica con progreso tecnológico exógeno y constante es bastante similar al análisis hecho hasta ahora. La única diferencia es que, en lugar de analizar el capital por persona ($k \equiv K/L$) será conveniente analizar el *capital por unidad de trabajo eficiente*, que vamos a definir como $\hat{k} \equiv K/\hat{L}$ porque, como veremos seguidamente, su comportamiento es virtualmente idéntico al comportamiento de k cuando no hay progreso tecnológico. Como $F(\cdot)$ presenta rendimientos constantes a escala, se cumple

$$\frac{F(K,\hat{L})}{\hat{L}} = F\left(\frac{K}{\hat{L}}, \frac{\hat{L}}{\hat{L}}\right) = F(\hat{k},1) = f(\hat{k}).$$

Volvamos a la ecuación [1.8] y dividamos los dos lados por $\hat{L}$:

$$\frac{\dot{K}}{\hat{L}} = sf(\hat{k}) - \delta\hat{k}. \qquad [1.22]$$

Para saber el comportamiento de $\hat{k}$ en el tiempo, calculamos su derivada con respecto al tiempo (de manera parecida a lo que hemos hecho en [1.12]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial\hat{k}}{\partial t} \equiv \frac{\partial\left(\frac{K}{LA}\right)}{\partial t} &= \frac{\dot{K}LA - K\dot{L}A - KL\dot{A}}{(LA)^2} = \\ &= \frac{\dot{K}}{LA} - \frac{\dot{L}}{L}\frac{K}{LA} - \frac{\dot{A}}{A}\frac{K}{LA} = \\ &= \frac{\dot{K}}{\hat{L}} - (n+x)\hat{k}\,, \end{aligned} \qquad [1.23]$$

Substituyendo [1.23] en [1.22] obtenemos

$$\frac{\partial\hat{k}}{\partial t} = sf(\hat{k}) - (\delta + n + x)\hat{k}. \qquad [1.24]$$

Obsérvese que la ecuación [1.24] es casi idéntica a [1.15]. Las dos diferencias son: (1) el stock de capital relevante no es k sino $\hat{k}$ y (2) la constante que multiplica el stock de capital en el último término es $\delta+n+x$ en lugar de $\delta+n$. Si procedemos a construir un gráfico similar al 1.10 encontraremos que las curvas de ahorro y depreciación se cruzan una vez y solamente una (véase el gráfico 1.14), por lo que existe un único stock de capital de estado estacionario constante, $\hat{k}^*$, y la tasa de crecimiento es cero, $\gamma^*_{\hat{k}} = 0$. En este estado estacionario, será cierto que el PIB por unidad de trabajo eficiente, $\hat{y} \equiv Y/(LA)$, es constante y su tasa de crecimiento es cero. No reproducimos la exposición de este análisis en estas páginas porque el procedimiento es idéntico al utilizado para la construcción del gráfico 1.10.

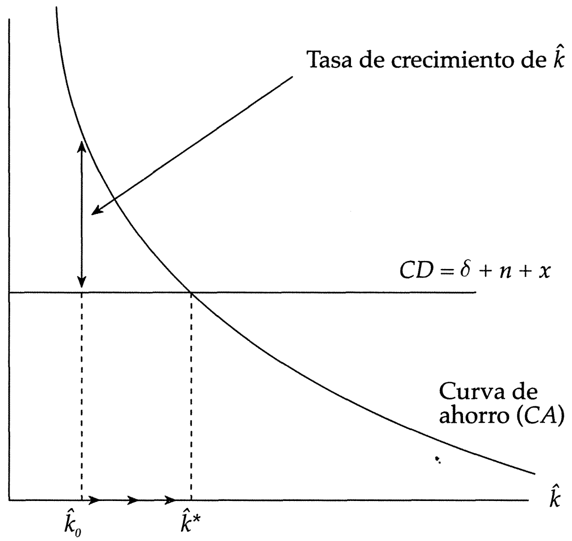

Gráfico 1.14. El modelo neoclásico de Solow-Swan con progreso tecnológico.

Dado que, por definición, $\hat{k} \equiv \frac{K}{LA} = \frac{K}{L}\frac{1}{A} = \frac{k}{A}$, tenemos que la tasa de crecimiento de $\hat{k}$ es igual a la diferencia entre γ_k y $\gamma_A \equiv x$. Por lo tanto, obtenemos que en el estado estacionario, donde $\gamma_{\hat{k}}^* = \gamma_{\hat{y}}^* = 0$, será cierto que $\gamma_y^* = \gamma_k^* = x$. Es decir, en el estado estacionario el capital y el PIB per cápita crecerán al mismo ritmo que la tecnología, x.

El gran problema del modelo neoclásico: El progreso tecnológico DEBE *ser exógeno.*

La conclusión a la que hemos llegado en el apartado anterior es bastante importante: la economía neoclásica puede tener crecimiento positivo a largo plazo si la tecnología crece. La pregunta que debe surgir de forma inmediata es: ¿Cómo podemos acelerar el progreso tecnológico de manera que aumente la tasa x? Hasta ahora hemos supuesto que el progreso tecnológico era *exógeno* en el sentido de que no surgía de la inversión en I+D de las empresas o del esfuerzo investigador de nadie; simplemente, el nivel tecnológico aumentaba constantemente sin explicar por qué. Si dejamos las cosas así, deberemos concluir que el modelo neoclásico de crecimiento económico explica muchas cosas, pero deja una cosa importante sin explicar: precisamente, ¡el crecimiento económico! El modelo dice que la única fuente de crecimiento a largo plazo debe ser el progreso técnico, pero el modelo no explica de dónde surge dicho progreso.

El problema es mucho más grave de lo que parece porque, si seguimos los postulados neoclásicos, el progreso tecnológico DEBE ser exógeno. Para entender este punto, tomemos de nuevo la función de producción neoclásica. Como se recordará, una de las características de *toda función neoclásica es que presenta rendimientos cons-*

tantes en los inputs rivales, en este caso K y L. El teorema matemático de Euler nos dice que una función homogénea de grado uno tiene la propiedad de que

$$F(K, L, A) = K\frac{\partial F}{\partial K} + L\frac{\partial F}{\partial L}. \qquad [1.25]$$

Otro de los postulados neoclásicos (que estudiaremos con más detalle en el capítulo 3) es que el mundo es de competencia perfecta. Sabemos que cuando hay competencia perfecta, la recompensa que recibe cada factor de producción es su producto marginal. Es decir, si w es el salario del trabajo y R es la renta del capital, entonces en un mundo neoclásico de competencia perfecta, los precios de los factores cumplen $w = \partial F/\partial L$ y $R = \partial F/\partial K$. Si substituimos estas dos igualdades en [1.25] obtenemos una conclusión devastadora:

$$F(K, L, A) = KR + Lw. \qquad [1.26]$$

La condición [1.26] dice que el producto total es igual a la cantidad de capital multiplicada por su precio más la cantidad de trabajadores multiplicada por el salario que cobra cada uno de ellos. Otra manera de leer la misma ecuación es: una vez pagado el salario a los trabajadores y la renta al capital, el producto de la economía se acaba. La implicación de todo esto es que la *economía neoclásica no puede dedicar recursos a la financiación del progreso tecnológico*. Los economistas neoclásicos, pues, se ven OBLIGADOS a suponer que *el progreso tecnológico es exógeno*. Esto reduce enormemente la utilidad del modelo porque basa todo crecimiento a largo plazo en los aumentos *no explicados* y *no explicables* de la variable tecnológica. Esta conclusión hace que el modelo neoclásico de crecimiento sea intelectualmente insatisfactorio.

Otra lectura más positiva de esta conclusión es que si queremos construir un modelo que explique el crecimiento a largo plazo, deberemos abandonar *alguno* de los supuestos neoclásicos: o bien la función de producción no es neoclásica, o bien no hay competencia perfecta, o bien se relaja algún otro supuesto. Esto es lo que haremos en los sucesivos capítulos de este libro.

A pesar de no ser una teoría satisfactoria del crecimiento a largo plazo, el modelo neoclásico ofrece unas explicaciones interesantes de la transición hacia el estado estacionario. Vamos a verlas a continuación.

1.6 Una medida cuantitativa de la duración de la transición

Un aspecto importante del modelo es la rapidez con la cual la economía evoluciona durante la transición hacia el estado estacionario. Para cuantificar esta velocidad, será más conveniente volver al modelo sin progreso tecnológico, y utilizar la función de producción de Cobb-Douglas. Definimos la *velocidad de convergencia* como el cambio en la tasa de crecimiento cuando el capital aumenta en un uno por ciento. Si denotamos esta velocidad con la letra β, entonces tenemos que la velocidad de convergencia es

$$\beta = -\frac{\partial \gamma_k}{\partial \log(k)}. \qquad [1.27]$$

Para calcular esta derivada, es preciso expresar la tasa de crecimiento como función de $\log(k)$, dado que ahora la tenemos como función de k. Para ello será preciso darse cuenta que el término $Ak^{-(1-\alpha)}$puede reescribirse como $Ae^{-(1-\alpha)\log(k)}$. Utilizando la ecuación fundamental de Solow-Swan [1.20′] obtenemos

$$\gamma_k = sAe^{-(1-\alpha)\log(k)} - (\delta + n).$$

Derivando esta expresión con respecto a $\log(k)$ tenemos que

$$\beta \equiv -\frac{\partial \gamma_k}{\partial \log(k)} = -\left[sAe^{-(1-\alpha)\log(k)}(-(1-\alpha))\right] = \\ = \left[(1-\alpha)sAk^{-(1-\alpha)}\right].$$

Vemos que β es una función decreciente de k. Esto implica que la velocidad de convergencia disminuye a medida que el capital se aproxima a su valor de estado estacionario. En el estado estacionario, sabemos que $sA(k^*)^{-(1-\alpha)}$ es igual a $\delta + n$. La velocidad de convergencia, pues, disminuye a lo largo de la transición hasta alcanzar el valor

$$\beta^* \equiv (1-\alpha)(\delta + n).$$

Otra manera de llegar al mismo resultado es analizar una versión linearizada del modelo de Solow-Swan. Mediante una aproximación de Taylor de primer orden de [1.20′] alrededor de $\log(k^*)$ se obtiene

$$\gamma_k = -(1-\alpha)sAe^{-(1-\alpha)\log(k^*)}[\log(k) - \log(k^*)].$$

Nótese que el valor de $sAe^{-(1-\alpha)\log(k^*)}$ en el estado estacionario es $\delta + n$. Substituyendo el primero por el segundo, obtenemos:

$$\gamma_k = -(1-\alpha)(\delta + n)[\log(k) - \log(k^*)]. \qquad [1.28]$$

Es decir, la tasa de crecimiento del capital de la economía está inversamente relacionada con el nivel de capital inicial. Obsérvese que, ahora que tenemos la tasa de crecimiento como una función lineal de $\log(k)$, es fácil tomar la derivada para calcular la velocidad $\beta^* \equiv -\frac{\partial \gamma_{k^*}}{\partial \log(k^*)} = (1-\alpha)(\delta+n)$.

Para proporcionar una medida cuantitativa de esta velocidad de convergencia, recordemos que la tasa de crecimiento de la población de los países industrializados oscila alrededor del 0,01. La tasa de depreciación lo hace alrededor del 0,1. La participación del capital físico en los países industrializados está situada alrededor del 0,30. En consecuencia, la velocidad de convergencia que predice el modelo es, más o menos, de $(1-\alpha)(\delta+n) = 0,7 \times 0,11 = 0,077$ o 7,7% anual. Es decir, cada año se cubre el 7,7% de la diferencia existente entre el capital inicial y el capital de estado estacionario, k^*. Esta velocidad implica que la mitad de la distancia existente entre k_0 y k^* desaparece en un periodo de unos 9 años.[12] La velocidad de convergencia hacia el estado estacionario es, pues, bastante grande, por lo que la transición tiene lugar en un breve espacio de tiempo. La situación sería aún más extrema si cosideráramos el modelo con progreso tecnológico exógeno por cuanto, en este caso, la velocidad de convergencia sería $(1-\alpha)(\delta+n+x)$. Sin necesidad de repetir todo el proceso, el lector puede verificar este resultado, por cuanto la diferencia que el progreso técnico introducía en la ecuación fundamental de Solow-Swan era que, en lugar de $\delta+n$, la tasa de depreciación efectiva era de $\delta+n+x$. Es natural, pues, que esta nueva tasa de depreciación aparezca en la nueva velocidad de convergencia.

La velocidad de convergencia que se ha determinado sería mucho menor si tomáramos en consideración una definición más amplia del capital (de modo que incluyera otros elementos, como el capital humano, del cual hablaremos más adelante). A modo de ejemplo, si la participación del capital, definido de forma amplia, fuera de $\alpha = 0,80$, la velocidad de convergencia predicha se situaría alredor de 0,022 (lo que conlleva que la mitad del desfase se cubriría en un periodo de 32 años). Barro y Sala-i-Martin (1991, 1992a, 1992b) y Mankiw, Romer y Weil (1992) han demostrado que estos valores de convergencia más reducidos concuerdan mejor con los datos empíricos. En el capítulo 10 estimaremos la velocidad de convergencia en varios conjuntos de datos regionales e internacionales.

1.7 Convergencia: absoluta y condicional

El gráfico 1.10 indica que la tasa de crecimiento de una economía neoclásica es decreciente. Esto significa que si las economías se diferenciasen únicamente en el

[12] La ecuación [1.28] es una ecuación diferencial en $\log(k_t)$ cuya solución es $\log(k_t) = (1-e^{-\beta t})\log(k^*) + e^{-\beta t}\log(k_0)$. El momento t para el cual $\log(k_t)$ está a mitad de camino entre k_0 y k^* satisface la condición $e^{-\beta t} = 1/2$. Tomando logaritmos de los dos lados y despejando t veremos que el tiempo que se tarda en recorrer la mitad del camino es $\log(2)/\beta$. Para el caso de $\beta = 0,077$ obtenemos que $\log(2)/\beta = 9$ años.

stock de capital por trabajador, en el mundo real deberíamos observar un crecimiento superior en las economías pobres que en las ricas (en este caso las diferentes economías se representarían en el gráfico 1.10 con diferentes valores de k_0, aunque se supone que todas ellas poseen el mismo volumen de capital en el estado estacionario, k^*). Este fenómeno se puede observar también en la ecuación [1.20], donde la tasa de crecimiento de k está inversamente relacionada con el nivel de k. Dado que la tasa de crecimiento de la renta per cápita es proporcional a la tasa de crecimiento del capital per cápita, el modelo predice también una relación negativa entre la renta inicial y su tasa de crecimiento.

Esta relación inversa entre la renta inicial y su tasa de crecimiento es conocida como la *hipótesis de convergencia*. Esta hipótesis es interesante, puesto que se puede comprobar fácilmente empleando datos de un conjunto de países en un momento dado del tiempo, mediante la confección de un simple gráfico en el que se representen la renta de cada país y su tasa de crecimiento (véase, por ejemplo, el gráfico 10.3 en el capítulo 10). Si la correlación observada es negativa, estas economías tenderán a converger en el tiempo.

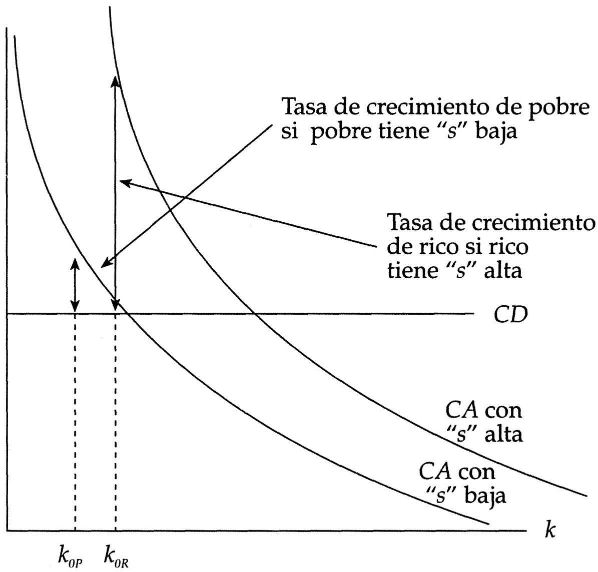

Gráfico 1.15. Convergencia condicional.

Hay que destacar que el modelo neoclásico que acabamos de esbozar *sólo predice la existencia de una relación negativa entre la renta y las tasas de crecimiento, en el caso de que la única diferencia entre los países resida en sus stocks iniciales de capital.* Si, por el contrario, las economías también se diferencian en su nivel de tecnología, A, en su tasa de ahorro, s, en su tasa de depreciación, δ, o en su tasa de crecimiento de la población, n, el modelo no predice un mayor crecimiento para los países más pobres. Como ejemplo, pasemos al gráfico 1.15, en el cual dos economías (designadas por P, el país pobre y R, el país rico) poseen un stock de capital k_{0P} y k_{0R}, respectivamente (siendo $k_{0P} < k_{0R}$). Supongamos, además, que la tasa de ahorro en el país pobre es diferente a la del país rico, por lo que los dos países convergen a un estado estacionario distinto. Nótese que, si no sabemos qué tasa de ahorro tiene cada país, no sabemos cuál es su tasa de crecimiento. En particular, no sabemos si el rico crece menos o más que el pobre. Es decir, el modelo *no predice* que vaya a haber convergencia, en el sentido de que la economía pobre vaya a crecer más que la rica. Por ejemplo, si el país pobre es el que tiene una tasa de ahorro inferior, entonces su tasa de crecimiento es menor y, en este caso, habría *divergencia* y no convergencia. Sin embargo, aun es posible hablar de *convergencia condicional*, en el sentido de que *la tasa de crecimiento de una economía está directamente relacionada con la distancia a la que se sitúa de su estado estacionario*. En otras palabras, si un país es pobre en la actualidad pero se espera que siga siéndolo en el largo plazo, entonces su tasa de crecimiento no será muy elevada. Por el contrario, si se espera que el mismo país acabe siendo muy rico, entonces su tasa de crecimiento actual será alta. El modelo neoclásico, pues, predice la convergencia únicamente después de tener en cuenta los elementos determinantes del estado estacionario.

La intuición tras el concepto de convergencia condicional es muy sencilla. Si dos países tienen la misma función de producción neoclásica, entonces el que tenga una cantidad menor de capital (país pobre) tendrá un producto marginal del capital superior al que tenga mucho capital (país rico). Literalmente, el producto marginal del capital es el aumento que experimenta la producción cuando incrementamos el stock de capital *en una unidad*. Si invertimos en una máquina en el país pobre obtendremos más producción que si invertimos en ella en el país rico. Ahora bien, para determinar el crecimiento de un país, no sólo es importante saber cuál será el aumento de la producción generado por cada máquina adicional sino que debemos saber también en cuántas máquinas invertimos. Quien nos dice en cuántas máquinas invertimos es la tasa de ahorro e inversión, s. Se puede dar el caso de que un país rico (y con un producto marginal del capital reducido) tenga una tasa de inversión tan elevada que el aumento total de la producción sea superior al aumento del país pobre, a pesar de que *cada una* de las máquinas adicionales genere un incremento pequeño de la producción.

Otra manera de apreciar el fenómeno de la convergencia condicional es mirar la ecuación [1.28], en la cual la tasa de crecimiento está negativamente relacionada con el logaritmo de k. Obsérvese también que en la misma ecuación aparece el término $\log(k^*)$. Desde un punto de vista empírico es preciso que k^* sea constante para poder observar la relación entre el crecimiento y el nivel de capital. Si k^* no es constante y se omite de la regresión, entonces las estimaciones del coeficiente de $\log(k)$ estarán sesgadas siempre que k^* esté correlacionado con k. Barro y Sala-i-Martin (1991, 1992a, 1992b) y Mankiw, Romer y Weil (1992) han encontrado apoyo empírico para la hipótesis de convergencia condicional y, en consecuencia, para el modelo neoclásico. La participación del capital que se precisa para que el modelo se ajuste a los datos es sustancialmente mayor que 0,3 y cercano a 0,75. Los resultados de estos estudios empíricos se analizan también en el capítulo 10 de este libro.

1.8 El modelo de Solow-Swan ampliado

La evidencia empírica sobre la hipótesis de convergencia indica que el modelo neoclásico es consistente con los datos estadísticos, si la participación del capital ronda el 0, 80 (véase el capítulo 10). Las estimaciones empíricas sobre la participación del capital en los países industrializados indican que está más próxima al 0, 3 que al 0, 80. Por este motivo, es preciso considerar K en un sentido amplio para que abarque otras formas de capital no físico.

Para incorporar esta idea, Mankiw, Romer y Weil (1992) construyeron lo que ellos bautizaron como un "modelo de Solow-Swan ampliado". El modelo incluye tres factores de producción: capital, trabajo en el sentido convencional, y capital humano (designado por H) en una tecnología Cobb-Douglas:

$$Y = BK^{\lambda}H^{\eta}L^{1-\lambda-\eta}. \qquad [1.29]$$

Mankiw, Romer y Weil supusieron, además, que tanto el capital físico como el humano se podían acumular detrayéndolos de la producción:

$$\dot{K} + \dot{H} = BK^{\lambda}H^{\eta}L^{1-\lambda-\eta} - C - \delta_k K - \delta_h H,$$

siendo δ_k y δ_h las tasas de depreciación del capital físico y el humano, respectivamente. Imaginemos que $\delta_k = \delta_h = \delta$. Para simplificar el análisis, tengamos en cuenta que si las empresas maximizan, van a competir por el capital físico y humano hasta que el producto marginal neto de los dos tipos de capital sea idéntico. Es decir, $\lambda\frac{Y}{K} = \eta\frac{Y}{H}$. Podemos reescribir esta expresión de forma alternativa, $H = (\eta/\lambda)K$, lo que nos indica que, en todo momento, la cantidad de capital humano debe ser proporcional a la de capital físico. Si se substituye esta relación en la expresión del producto, obtenemos que $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, siendo la participación efectiva del capital, α, la suma de las participaciones del capital físico y el humano, $\alpha = \lambda + \eta$ y, además, la constante $A = B(\eta/\lambda)^{\eta}$. Por esta razón, el modelo de Solow-Swan ampliado para incorporar el capital humano es únicamente una forma de argumentar que la participación del capital relevante es mayor que la participación del capital físico. En otros términos, se trata de una forma de defender que la participación del capital relevante está más próxima a 0,80 que a 0,3. Nótese que la velocidad de convergencia que se deriva de la ecuación [1.20'] depende ahora de la participación del capital en un sentido amplio,

$\alpha = \lambda + \eta$, en lugar de la participación del capital físico, λ, por lo que la velocidad de convergencia es igual a $\beta^* = (1 - \lambda - \eta)(\delta + n)$. Si la participación del capital físico es $\lambda = 0{,}30$ y la participación del capital humano $\eta = 0{,}50$, la tasa relevante del capital es $\alpha = \lambda + \eta = 0{,}80$ y la velocidad de convergencia que se desprende (cuando $\delta = 0{,}10$ y $n = 0{,}01$) se sitúa en $\beta^* = 0{,}022$.

Estos valores se aproximan mucho más a los obtenidos por la literatura empírica (que se analiza en el capítulo 10) que fluctúan alrededor del 0,02.

1.9 La introducción de una economía abierta

Los modelos de crecimiento descritos hasta el momento se basan en el supuesto de una economía cerrada, en la cual no existe intercambio de bienes, activos o trabajo entre los países. La evidencia empírica que hemos citado se refiere a economías, como los Estados que forman Estados Unidos, las prefecturas de Japón e, incluso, los países de la OCDE, que, obviamente, no son economías cerradas. Barro, Mankiw y Sala-i-Martin (1992) presentaron un modelo de economías abiertas en el que los diferentes países pueden pedir prestado en los mercados internacionales de capital, pero en el que no todo el capital puede ser usado como aval o garantía colateral. De modo parecido, en lugar de préstamos internacionales, uno puede imaginar un mundo con dos tipos de capital, pero en el que solamente uno de ellos es móvil. A partir de la función de producción [1.29], imaginemos que K puede desplazarse libremente a través de las fronteras, pero no así H.[13] Imaginemos que existe un mercado de capital mundial, en el que se paga un tipo de interés real mundial, r^*. El supuesto de movilidad perfecta de K exige que el producto marginal de K sea igual al tipo de interés mundial y, por tanto, $\lambda\frac{Y}{K} = r^* + \delta$. Esta igualdad se puede utilizar para reescribir K como función de Y: $K = \lambda\frac{Y}{r^*+\delta}$. Substituyendo esta expresión en la función de producción [1.29], obtenemos la forma reducida de la función de producción $Y = AH^{\alpha}L^{1-\alpha}$, en la cual $\alpha = \frac{\eta}{1-\lambda}$ y $A \equiv B^{1/(1-\lambda)}[\lambda/r^* + \delta)]^{\lambda/(1-\lambda)}$. Hay que señalar que la forma reducida de la función de producción de este modelo de economía abierta es idéntica a la función de producción del modelo neoclásico ampliado de economía cerrada y que, además, el valor numérico de la participación relevante del capital, α, es muy próximo al de éste. En efecto, si continuamos suponiendo que λ adopta un valor cercano a 0,30 y η vale aproximadamente 0,50, la participación relevante del capital es $\alpha = 0{,}50/0{,}7 = 0{,}71$. Si aplicamos estos valores a nuestra fórmula de la velocidad de convergencia (que, recordémoslo, es $\beta^* = (1 - \alpha)(\delta + n)$), entonces la velocidad se sitúa en este caso en $\beta^* = 0{,}031$ (recordemos que la velocidad de convergencia de

[13] En lugar de interpretar K y H como capital físico y humano, respectivamente, podríamos identificar K con el capital *"móvil"* y H con el *"inmóvil"*. Para simplificar la exposición, sin embargo, aquí seguiremos llamando capital físico a K y capital humano a H.

una economía cerrada con una participación similar del capital en el producto oscila alrededor de $\beta = 0{,}022$, que es bastante parecida). Por esta razón, la introducción de la movilidad del capital en un modelo neoclásico no modifica sustancialmente las predicciones cuantitativas y cualitativas sobre la velocidad de la transición, siempre que la parte del capital que pueda emplearse como aval no sea muy grande. La consecuencia es que, en la práctica, tratar con modelos de economía cerrada puede no ser una idea tan descabellada.